

지난 시간에 push forward 까지 했다.

<Differential form.>

U 는 한 coordinate chart 이다. $U \in \mathbb{R}^n$, $x \in U$.

그러면 우리는 n 차원의 vector space 를 가진다. $T_x U = \{\text{tangent vectors}\}$

이제부터 벡터라고 하면 다 tangent vector 를 의미하는 것이다.

$$T_x U = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x \right\}$$

$$\text{Let } T_x^* U = \text{Hom}_R (T_x U, \mathbb{R})$$

α 는 1-form 이다.

$$\begin{aligned} \alpha : U &\longrightarrow T_x^* U \\ x &\longmapsto \alpha(x) \end{aligned}$$

→ 이게 무슨 뜻인지 교수님도 모른다.

아마 \mathbb{R} 은 vector 와 covector 의 inner product 를 의미

Let $\{x^1, \dots, x^n\}$ be coordinate on U .

$T_x^* U$ 의 basis 는 dx^1, \dots, dx^n 이며, 이것은

$T_x U$ 의 basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 과 dual 이다.

inner product 연산은 벡터와 코벡터를 짝지어 실수를 만드는 거다.

$$\langle -, - \rangle : T_x^* U \times T_x U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left\langle x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{이것이 서로 dual한 basis의 관계다.}$$

1-form α 는 basis $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ 의 선형 결합이다.

$$\alpha = \alpha_1(x) dx^1 + \dots + \alpha_n(x) dx^n$$

이런 정의는 coordinate independent definition 이다.

아까 벡터는 $V(x) = V^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + V^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n}$ 이라고 정의했었다.

$$\langle \alpha, V \rangle = \alpha_1(x) V^1(x) + \dots + \alpha_n(x) V^n(x)$$

$f(x)$ 가 U 에서 smooth function 이라 하자.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

이 df 는 smooth 1-form 이다.

$\Omega^1(U) \subseteq$ space of 1-form 이다.

$$\Omega^1(U) \times \text{Vect}(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

Definition) Let $V \in \text{Vect}(U)$,

V 의 interior product. i_V

$$i_V : \Omega^1(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

$$\alpha \mapsto \langle \alpha, V \rangle$$

example) Let $V \in \text{Vect}(U)$, $f \in C^\infty(U)$

$$V(f) = \sum_i V^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} := i_V df = \langle df, V \rangle$$

df 는 아까 보았듯 f 로 만든 1-form.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx^i$$

$$\alpha_i(x) = i \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha = \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle$$

$\underbrace{i \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha}_{i_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha}$. interior product 이다.

그러면 2-form, 3-form은 뭐가? 텐서이다

Definition. $\wedge^p T_x^* U$ denote p -th exterior product of $T_x^* U$

ξ 는 p -form 이다.

$$\xi : U \rightarrow \wedge^p T_x^* U$$

$$x \mapsto \xi(x)$$

The basis of $\wedge^p T_x^* U$ $\{ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \}$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_p$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$\dim(\Lambda^p T_x^* U) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1부터 n까지 중 p개를 뽑는 경우의 수.

Wedge product란 뭐가?

Def) $\Omega^p(U)$: set of smooth p forms on U.

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_p \Omega^p(U) \quad \rightarrow \text{이게 무슨 의미야?}$$

$$= \Omega^0(U) + \Omega^1(U) + \dots + \Omega^p(U) + \dots$$

있는 p-form과 q-form에 대해 둘의 wedge product를 정의할 수 있다.

$$\wedge : \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^{p+q}(U)$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta$$

bilinear property $(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) \wedge \beta = \lambda_1 (\alpha_1 \wedge \beta) + \lambda_2 (\alpha_2 \wedge \beta)$

associativity: $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

Graded commutativity

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \text{ 는 } p \text{ form, } \beta \text{ 는 } q \text{ form.}$$

예를 들어, 두 1-form의 wedge product에 대해.

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

$$dx^i \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^i = 0 \quad !!!$$

exterior derivatives, d가 무슨 의미냐?

$$d: C^\infty(U) = \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$$

0 form 으' 1 form 으' mapping.

$$f \longmapsto df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

라이프니츠 룰 $d(fg) = f dg + g df$

Theorem: There exists a unique map.

$$d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$$

• • d 는 다음을 만족한다.

① d is \mathbb{R} -linear

② $d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$

③ $d: \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ 는 \mathbb{R} 상의 d 와 일치한다.

④ Graded Leibniz rule.

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

↳ α 는 p -form, β 는 q -form

p 는 $\alpha \wedge \beta$ 의 form 차수인가?

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$d\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \left(d\alpha_{i_1, \dots, i_p}(x) \right) (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})$$

$$+ \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \left(\alpha_{i_1, \dots, i_p}(x) \right) \left\{ d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \right\}$$

영항 불감인데 어케 계산?

→ 교과서를 보는 게 낫겠지.

(form 에 d 붙여서 2 form 만드는 예시를 꼭꼭 봐야 감을 잡을 수 있겠다.

아무튼 결론은,

$$d\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial \alpha_{i_1, \dots, i_p}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$d\alpha = \sum_{i_1 < i_2} \alpha_{i_1 i_2} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i_1 < i_2} (\alpha_{i_1 i_2} - \alpha_{i_2 i_1}) (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2})$$

이론 벡터장에 적용하면,

$$dA = \sum_{i,j} \partial_i A_j(x) (dx^i \wedge dx^j)$$

$$dA = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) (dx^i \wedge dx^j)$$

$$dA = F = \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij} (dx^i \wedge dx^j)$$

그러면 dF 는 무엇인가? 계산해 보자!

$dF = 0$ 이 되어야 한다 즉 라는 교수님.

이게 벡터장 방정식과 이어지면

$$\nabla \times E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0 \text{ 이 된다 한 것.}$$

$$\textcircled{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} F_{ij} \right) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j.$$

→ 아마 ijk permutation 둘다 보면 사라질 거 같음.

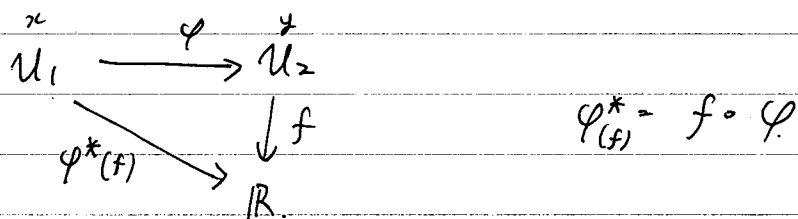
Pull back.

Let $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ & $U_2 \subset \mathbb{R}^m$

Let $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$

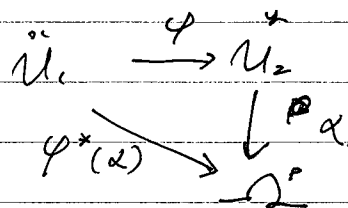
$$\varphi: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1 = \varphi^1(x), y^2 = \varphi^2(x), \dots, y^m = \varphi^m(x))$$

φ 의 pull back φ^* 는 이렇게 정의된다.



$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$$

form α pull back 할 수 있다.



$$\varphi^*: \Omega^p(U_2) \rightarrow \Omega^p(U_1)$$

$$\alpha =$$

이거 이렇게 정의하는 게 맞나?
교과서 봐야지.