AM 10th week-1. 5월 마지막 주 전까지 강의를 끝마치겠다. (3월 23일까지??)

지난 시간에 push forward 까지 했다.

⟨Differential form.⟩

$\mathcal{U}$는 한 coordinate chart 이다. $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{U}$.

그러면 우리는 n차원의 vector space를 가진다. $T_x\mathcal{U} = \{\text{tangent vectors}\}$

이제부터 벡터라고 하면 다 tangent vector를 의미하는 것 이다.

$$T_x\mathcal{U} = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_x, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_x \right\}$$

Let $T_x^*\mathcal{U} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x\mathcal{U}, \mathbb{R})$

→ 이게 무슨 뜻인지 교수님도 모름.
아마 $\mathbb{R}$은 vector와 covector의 inner product를 의미

α는 1-form 이다.

$$\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow T_x^*\mathcal{U}$$
$$x \longmapsto \alpha(x)$$

Let $\{x^1, \cdots, x^n\}$ be coordinate on $\mathcal{U}$.

$T_x^*\mathcal{U}$의 basis는 $dx^1, \cdots, dx^n$ 이며, 이것은

$T_x\mathcal{U}$의 basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 과 dual 이다.

inner product 연산은 벡터와 코벡터를 짝지어 실수를 만드는 거다.

$$\langle -, - \rangle : T_x^*\mathcal{U} \times T_x\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\left\langle x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta^i_j$ 이것이 서로 dual 한 basis의 관계다.

1-form α는 basis $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$의 선형 결합이다.

$$\alpha = \alpha_1(x)\,dx^1 + \cdots + \alpha_n(x)\,dx^n.$$

이런 정의는 coordinate independent definition 이다.

아까 벡터는 $V(x) = V^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + V^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}$ 이라고 정의했었다.

$$\langle \alpha, V \rangle = \alpha_1(x)V^1(x) + \cdots + \alpha_n(x)V^n(x)$$

$f(x)$가 $\mathcal{U}$에서 smooth function 이라 치자.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n$$

이 df는 smooth 1-form 이다.

$\Omega^1(\mathcal{U})$는 space of 1-form 이다.

$\Omega^1(\mathcal{U}) \times Vect(\mathcal{U}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{U})$

Definition) Let $V \in Vect(\mathcal{U})$,

V의 interior product. i_V

$$i_V : \Omega^1(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$$
$$\alpha \longmapsto \langle \alpha, V \rangle$$

example) Let $V \in Vect(\mathcal{U})$, $f \in C^\infty(\mathcal{U})$

$$V(f) = \sum_i V^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} := i_V\, df. = \langle df, V \rangle$$

df는 아까 보였듯 f로 만든 1-form.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\, dx^i$$

$$\alpha_i(x) = \underbrace{i_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha}_{} = \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle$$

$i_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha$. interior product 이다.

그러면 2-form, 3-form은 뭔가? 텐서다

Definition. $\Lambda^p T_x^* \mathcal{U}$ denote p-th exterior product of $T_x^* \mathcal{U}$

ξ는 p-form 이다. $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \Lambda^p T_x^* \mathcal{U}$

$$x \mapsto \xi(x)$$

The basis of $\Lambda^p T_x^* \mathcal{U}$ $\{ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \}_{i_1 < i_2 \cdots < i_p}$

$$\xi = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \xi_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$\dim(\Lambda^p T_x^* \mathcal{U}) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1부터 n 까지 중 겹치지 않게 p개를 뽑는 경우의 수.

wedge product 란 뭔가?

Def) $\Omega^p(\mathcal{U})$: set of smooth p forms on $\mathcal{U}$.

$$\Omega(\mathcal{U}) = \bigoplus_p \Omega^p(\mathcal{U})$$ → 이게 뭔 기호야?

$$= \Omega^0(\mathcal{U}) + \Omega^1(\mathcal{U}) + \cdots + \Omega^p(\mathcal{U}) + \cdots$$

있는 p-form과 q-form에 대해 둘의 wedge product를 정의할 수 있다.

$$\wedge : \Omega^p(\mathcal{U}) \times \Omega^q(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{p+q}(\mathcal{U})$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\wedge\beta$$

bilinear property $(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)\wedge(\beta) = \lambda_1(\alpha_1\wedge\beta) + \lambda_2(\alpha_2\wedge\beta)$

associativity : $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

Graded commutativity

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{pq}\beta\wedge\alpha,$$ α는 p form, β는 q form.

예를 들어, 두 1 form의 wedge product에 대해.

$$dx^i\wedge dx^j = -dx^j\wedge dx^i$$

$$dx^i\wedge dx^i = -dx^i\wedge dx^i = 0 \quad !!!$$

exterior derivatives, d가 무슨 의미냐?

$$d : C^\infty(\mathcal{U}) = \Omega^0(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{U})$$

0 form을 1 form으로 mapping.

$$f \longmapsto df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

라이프니츠 규칙 $d(f\cdot g) = f\,dg + g\,df$

Theorem : There exists a unique map.

$$d : \Omega'(u) \to \Omega'(u)$$

d는 다음을 만족한다.

① d is R-linear

② $d : \Omega^p(u) \longrightarrow \Omega^{p+1}(u)$

③ $d : \Omega^0(u) \longrightarrow \Omega^1(u)$ 는 방금 정의한 그 d 이다.

④ Graded Leibits rule.

$$d(\alpha\wedge\beta) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\,\alpha\wedge(d\beta)$$

↳ 어디서? ~~α와 β가~~

p는 $\alpha\wedge\beta$의 form 차수 인가?

$$\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} \alpha_{i_1,\cdots,i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$d\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} \left(d\alpha_{i_1,\cdots,i_p}(x)\right)\left(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\right)$$

$$+ \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} \left(\alpha_{i_1,\cdots,i_p}(x)\right) \underbrace{\left\{ d\left(dx^{i_1}\wedge\cdots dx^{i_p}\right)\right\}}$$

엄청 복잡한데 어케 계산?

→ 교과서를 보는 게 낫겠군.

1 form 에 d 붙여서 2 form 만드는 예시를 직접 봐야 감을 잡을 수 있겠다.

아무튼 결론은,

$$d\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_k} \frac{\partial\alpha_{i_1,\cdots,i_p}(x)}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$d\alpha = \sum_{ij} \partial_i\alpha_j \left(dx^i\wedge dx^j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\partial_i\alpha_j - \partial_j\alpha_i\right)\left(dx^i\wedge dx^j\right)$$

이를 벡터장에 적용하면,

$$dA = \sum_{i,j} \partial_i A_j(x) \,(dx^i \wedge dx^j)$$

$$dA = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(dx^i \wedge dx^j)$$

$$dA = F = \frac{1}{2}\sum_{i,j} F_{ij} \,(dx^i \wedge dx^j)$$

그러면 dF는 무엇인가? 계산해 보자!

$dF = 0$ 이 되어야 한다 주장하는 교수님.

이게 맥스웰 방정식과 이어지면

$\nabla \times \mathbb{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ 이 된다 한다.

⊛ $\left(\frac{\partial}{\partial x^k} F_{ij}\right) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j.$

→ 아마 ijk permutation 돌다보면 사라질 거 같음.

Pull back.

Let $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$ & $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$

Let $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$

$\varphi : (x^1, \cdots, x^n) \longmapsto (y^1 = \varphi^1(x), y^2 = \varphi^2(x), \cdots, y^m = \varphi^m(x))$

φ의 pull back φ^* 는 이렇게 정의된다.

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\mathcal{U}_1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(f)"'] & \overset{y}{\mathcal{U}_2} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\varphi^*_{(f)} = f \circ \varphi$$

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$$

form 도 pull back 할 수 있다.

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\mathcal{U}_1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(\alpha)"'] & \overset{y}{\mathcal{U}_2} \arrow[d, "\alpha"] \\ & \Omega^p \end{tikzcd}$$

$$\varphi^* : \Omega^p(\mathcal{U}_2) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{U}_1)$$

$\alpha =$

이거 이렇게 정의하는 게 맞나?
교과서 봐야지.