

AM 10th week - 2 (화요일 저녁 보강)

Tensor product 를 이용한 wedge product definition

$$dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$$

0-form 의 exterior product 를 명시적으로 계산하기

아인슈타인 합규약을 사용할 때,

$$df = (\partial_j f) dx^j$$

$$ddf = d(\partial_j f dx^j) = \partial_i \partial_j f dx^i \wedge dx^j + \partial_j f (ddx^j)$$

첫 번째 항 $\partial_i \partial_j f dx^i \wedge dx^j$ 이거는 antisymmetry 에 의해 0.

두 번째 항은 $ddx^j = 0$ 이라서 날아간다.

$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ 의 또 다른 증명법.

1-form 인 A.

$$A = A_j dx^j$$

$$dA = \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j$$

$$ddA = \frac{1}{2} \partial_k (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$$

$$= \frac{1}{2} \partial_k (\nabla \times A)_k dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$$

$$= \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \times A) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$$

$d^2=0$ 이므로, $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ 이라는 결론이 나온다.

3차원 에서 두 1-form A 와 B

$$A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$B = B_x dx + B_y dy + B_z dz$$

$A \wedge B$ 는 우리가 알던 curl 연산이다.

$$\begin{aligned} A \wedge B &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y) dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z) dz \wedge dx \\ &= [A \times B]_z dx \wedge dy + [A \times B]_x dy \wedge dz + [A \times B]_y dz \wedge dx \end{aligned}$$

$A \wedge B \wedge C$ 는 부피와 직결되며, 이것이 $dx \wedge dy \wedge dz$ (top form in 3D) 가 volume form 이라고 불리는 이유다.

$$\begin{aligned} A \wedge B \wedge C &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge \left\{ [B \times C]_z dx \wedge dy + [B \times C]_x dy \wedge dz + [B \times C]_y dz \wedge dx \right\} \\ &= A_z [B \times C]_z dz \wedge dx \wedge dy + A_x [B \times C]_x dx \wedge dy \wedge dz + A_y [B \times C]_y dy \wedge dz \wedge dx \\ &= A \cdot (B \times C) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

이런 걸 어떻게 잘 표기할 수 있을까... 고민하던 누군가가 Hodge dual 이라는 걸 개발

정의 : 가 뭐까? 내가 보기에는 hodge dual 관계인 두 form 을 곱하면 volume form 이 나오는 성질을 이용해 쉽게 이해할 수 있을 거 같다.

Examples in $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$

$$\star 1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$\star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1$$

$$\star dx^3 = dx^1 \wedge dx^2$$

$$\star(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3$$

$$\star(A \wedge B) = [A \times B]_z \star(dx \wedge dy) + [A \times B]_x \star(dy \wedge dz) + [A \times B]_y \star(dz \wedge dx)$$

$$= [A \times B]_z dz + [A \times B]_x dx + [A \times B]_y dy$$

$$= (A \times B) \cdot dx$$

$$\star(A \wedge B \wedge C) = A \cdot (B \times C) \star(dx \wedge dy \wedge dz) = A \cdot (B \times C) = \det \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Maxwell equation 을 단 한 줄로 나타내기

potential 을 나타내는 1-form 을 이렇게 정의한다.

$$A = A_x dx + A_y dy + A_z dz - \phi dt$$

이때, $A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ 는 기존에 전기역학에서 배운 벡터 포텐셜이며,
 ϕ 는 스칼라 포텐셜이다.

A 의 exterior derivative 는 field form 이라고 부른다. $F = dA$

$$dA = -(\partial_x \phi + \partial_t A_x) dx \wedge dt - (\partial_y \phi + \partial_t A_y) dy \wedge dt - (\partial_z \phi + \partial_t A_z) dz \wedge dt \\ + (\partial_y A_z - \partial_z A_y) dy \wedge dz + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) dz \wedge dx + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx \wedge dy$$

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$= E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

우리는 전기역학에서 전기장과 자기장이

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad E_x = -\partial_x \phi - \partial_t A_x$$

$$B = \nabla \times A, \quad B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y$$

라는 걸 안다. 이게 dA 의 계산 결과와 딱 맞아 떨어진다.

$dF = 0$ 은 $\nabla \cdot B = 0$ 과 $\nabla \times E + \partial_t B = 0$ 이랑 이어진다.

$$dF = (\partial_y E_x dy + \partial_z E_x dz) dx \wedge dt + (\partial_x E_y dx + \partial_z E_y dz) dy \wedge dt + (\partial_x E_z dx + \partial_y E_z dy) dz \wedge dt \\ + (\partial_x B_x dx + \partial_t B_x dt) dy \wedge dz + (\partial_y B_y dy + \partial_t B_y dt) dz \wedge dx + (\partial_z B_z dz + \partial_t B_z dt) dx \wedge dy$$

$$= (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz + (-\partial_z E_y + \partial_y E_z + \partial_t B_x) dy \wedge dz \wedge dt \\ + (-\partial_y E_x + \partial_x E_y + \partial_t B_z) dx \wedge dy \wedge dt + (-\partial_z E_x + \partial_x E_z + \partial_t B_y) dx \wedge dz \wedge dt$$

$$= \nabla \cdot B dx \wedge dy \wedge dz + [\nabla \times E + \partial_t B]_x dy \wedge dz \wedge dt + [\nabla \times E + \partial_t B]_z dx \wedge dy \wedge dt - [\nabla \times E + \partial_t B]_y dx \wedge dz \wedge dt$$

$$= \nabla \cdot B (*dt) + [\nabla \times E + \partial_t B]_x (*dx) + [\nabla \times E + \partial_t B]_z (*dz) + [\nabla \times E + \partial_t B]_y (*dy)$$

$$= 0$$

Current 3-form 이 뭘까? 설명을 들었지만 이해하지 못했다.

$$d\star F \stackrel{?}{=} J, \quad d(d\star F) = dJ = 0 \quad \text{conservation law 와 연결?}$$

Definition

$V = V^i(x) \partial_i$ be a vector field

integral curve: $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x, t) \longmapsto \varphi(t, x)$$

$$\partial_t \varphi(t, x) = V(\varphi(t, x))$$

x 위치에 있던 점이 벡터장을 따라 흐르면 t 초 뒤에 $\varphi(t, x)$ 에 있다는 것.

φ 는 위치 x 와 경과 시간 t 를 알려주면 t 뒤에 x 의 미래를 알려주는 함수.

φ 가 미리 고정된 lag time t 를 저장해 두고 있다면 어떨까?

$$\text{set } \varphi_t: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \varphi(t, x)$$

φ_t is the diffeomorphism of $\mathbb{R}^n$

t is called "diffeomorphism parameter"

φ_t is obtained by following the flow of V by t

$$\varphi_t \cdot \varphi_s = \varphi_{t+s}, \quad \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$$

Definition

Let $V \in \text{Vect}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$

$$\text{Lie derivative } \mathcal{L}_V \alpha := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* (\alpha)$$

→ 직관적인 해석은?

α 가 infinitesimal time 뒤의 patch 에서 정의되었지만,

α 를 0 초에서 patch 로 pullback 해서 t 에 대해 미분하겠다.

Vector field 의 flow 를 따를 때 p -form α 의 변화량을 계산.

→ 이것보다 더 이해하기 쉬운 해석은 없나?

만약 α 가 $\alpha = f \in \Omega^0$ 이라면, Lie derivative는 그냥 미분 연산자 V 를 f 에 적용한 것.

$$\mathcal{L}_V f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi(t, x)) = V(f)$$

어라, 왜 $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi(t, x)) = V(f)$ 이지? $\partial_t \varphi(t, x) = V(\varphi(t, x))$ 에서 어떻게 유도해?

그리고 Lie derivative 하고 Lie bracket 하고 무슨 연관이기에 Lie 라는 명칭을 동시에 쓰는 걸까?

Lie derivative 의 성질

① $\mathcal{L}_V(d\alpha) = d(\mathcal{L}_V \alpha)$, 즉 $\mathcal{L}_V$ 와 d 는 교환된다.

$$\text{proof) } \mathcal{L}_V(d\alpha) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(d\alpha) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\varphi_t^* \alpha) = d(\mathcal{L}_V \alpha)$$

$$\textcircled{2} \mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_V(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_V(\beta))$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha \wedge \beta)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha) \wedge \varphi_t^*(\beta)$$

이 성질을 기하학적으로 해석하면 재미있다고 하는데, 나는 이것을 어떻게 기하학적으로 해석해야 하는지 모르겠다.

일반적인 p -form을 Lie derivative 하면 일반식이 무엇일까?

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$\begin{aligned} L_V \omega &= \frac{1}{p!} \{ L_V (\omega_{i_1, \dots, i_p}) \} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \frac{1}{p!} \omega_{i_1, \dots, i_p} \{ L_V (dx^{i_1}) \} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \frac{1}{p!} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \{ L_V (dx^{i_2}) \} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\dots \\ &+ \frac{1}{p!} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \{ L_V (dx^{i_p}) \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_V dx^{i_8} = d\mathcal{L}_V x^{i_8} = dV(x^{i_8}) = dV^{i_8} = \frac{\partial V^{i_8}}{\partial x^k} dx^k$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \alpha &= \frac{1}{p!} V(x^{i_1}, \dots, x^{i_p}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \frac{1}{p!} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \left\{ \frac{\partial V^{i_1}}{\partial x^k} dx^k \right\} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \frac{1}{p!} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \left\{ \frac{\partial V^{i_2}}{\partial x^k} dx^k \right\} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{p!} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \left\{ \frac{\partial V^{i_p}}{\partial x^k} dx^k \right\} \end{aligned}$$

$$\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$\Omega \equiv$ volume form or top form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \Omega &= \mathcal{L}_V (dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= (\partial_1 V^1 + \partial_2 V^2 + \dots + \partial_n V^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \text{div}(V) \Omega \end{aligned}$$