

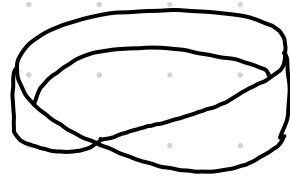
AM 10th week - 3

오늘의 주제: Stokes's theorem

교과서 91 page

Differential forms can be integrated over "oriented" spaces.

모|부|무스 때는 orientation 이 없는 공간의 예시다.



왜 그런지는 사실 잘 모르겠다.
안과 밖, 위와 아래가 구분되지
않아서 그런가?

앞으로 표기: $\{\partial_i\} = \{e_i\}$

Definition: An orientation of an n -dim vectorspace V is the choice of an oriented basis modulo the following equivalence relation

Two order basis $e_1, e_2, e_3 \dots$ and $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \dots$ give the same orientation if

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \lambda \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n \in \bigwedge^n V$$

for some $\lambda > 0 \rightarrow$ 이때! λ 가 양수인 게 중요

질문) 방금 문장에서 나온 단어 modulo 의 뜻이 뭐지?

$\bigwedge^n V$: n -th exterior product of V , 1차원 공간이다.

아마 부피들의 공간이라고 해석해도 될듯?

{Orientation of n -dimensional vector space} = $\frac{\text{nonzero elements of } \bigwedge^n V}{\text{rescaling by positive factor}}$

이 기준이라면 같은 방향성을 가진 basis 를 동등하게 취급할 수 있다.

우리는 V 에게 2가지 방향이 있음을 알 수 있다.

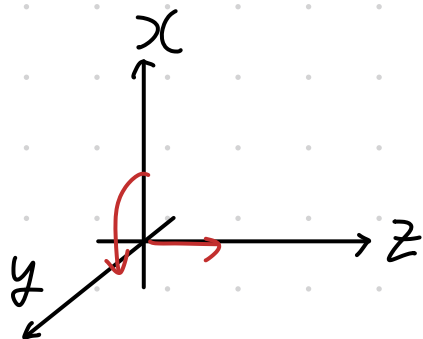
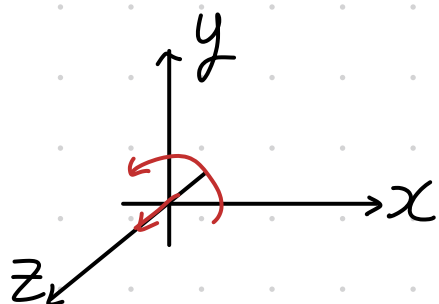
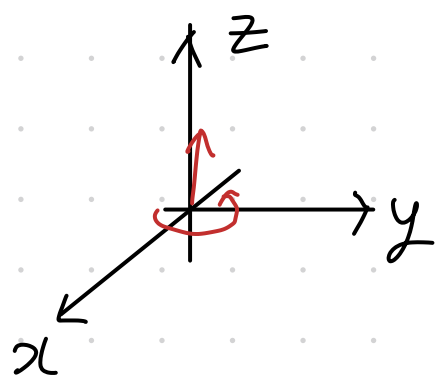
질문) 아무리 고차원 이어도 방향은 두 가지 밖에 없단 점이 신기함.

example) $\{e_1, e_2, e_3\}$ basis of $\mathbb{R}^3$

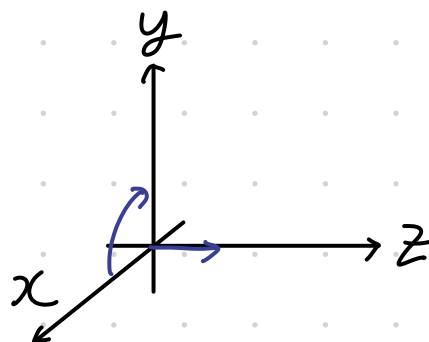
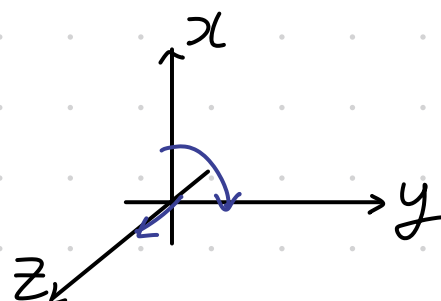
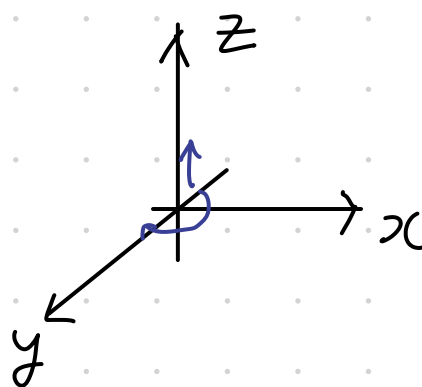
$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &= -e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \\ &= e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 \end{aligned}$$

그동안 Cartesian coordinate 에서 오른손 좌표계와 왼손 좌표계로
분류하던 게 이런 의미였다.

오른손 좌표계들



왼손 좌표계들



Let $x^1, x^2, \dots, x^n$ be an oriented coordinate system on U .

Let $\omega \in \Omega^n(U)$ be a differential n -form on U

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \rightarrow \text{orientation fixed wedge product is meaningless}$$

Let $x^1, x^2, \dots, x^n$ be an oriented coordinate system on U

$\omega \in \Omega^n(U)$ 를 일단 이렇게 적어보자.

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = -f(x) dx^2 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

The integral of ω is independent of choice of coordinates for fixed oriented coordinate system

$$\int_K \omega := \iint \dots \int_K (-f(x)) dx^2 dx^1 \dots dx^n = - \iint \dots \int_K f(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

또 다른 coordinate system $y^1, y^2, \dots, y^n$ 을 도입 해보자.

Volum form 변환에 Jacobi factor 가 들어간다.

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \det\left(\frac{dx^i}{dy^j}\right) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n$$

$\det\left(\frac{dx^i}{dy^j}\right) > 0$ 이라면 두 좌표계의 방향이 같음을 의미.

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = f(x(y)) \det\left(\frac{dx^i}{dy^j}\right) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n$$

$$\int_K \omega = \iint \dots \int_K f(x(y)) \det\left(\frac{dx^i}{dy^j}\right) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n$$

이런 좌표 변환을 diffeomorphism 으로 일반화 해보자.

두 패치 U_1 과 U_2 에 대해, x 좌표계는 U_1 의 것이고, y 는 U_2 의 것이다.

$\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ 의 smooth한 diffeomorphism 을 고려

φ 은 orientation 을 보존한다고 고려하자. 그러니까,

$$\varphi^*(dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n) = \det\left(\frac{d\varphi^i}{dx^j}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

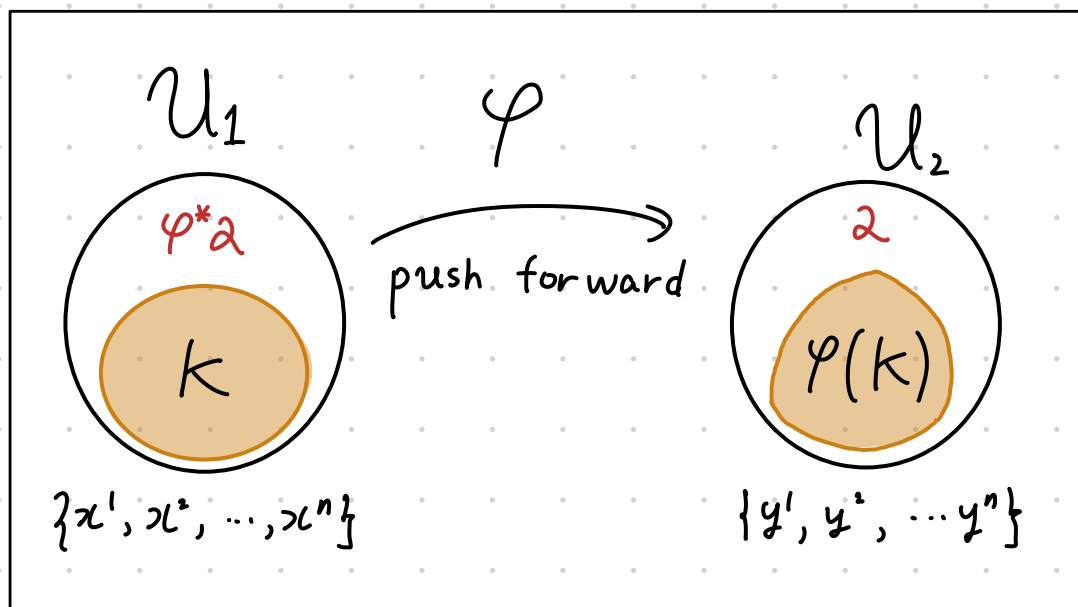
이때 $\det\left(\frac{d\varphi^i}{dx^j}\right) > 0$ 이 방향 보존을 의미.

적분 범위 K 가 $K \subset \mathcal{U}_1$ 이다.

그러면 치환적분이라는 개념을 diffeomorphism 으로 일반화 할 수 있다.

$$\int_K \varphi^* \alpha = \int_{\varphi(K)} \alpha$$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(K)} \alpha &= \int \dots \int_{\varphi(K)} f(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \int \dots \int_K f(\varphi(x)) \det\left(\frac{d\varphi^i}{dx^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \int_K \varphi^* \alpha \end{aligned}$$



α 의 pull back, $\varphi^* \alpha$ 를 명시적으로 계산하기

$$\varphi^* \alpha = (\varphi^* f) \cdot (\varphi^*(dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n))$$

$$\varphi^* f = f(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \varphi^*(dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n) &= \varphi^*(dy^1) \wedge \varphi^*(dy^2) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dy^n) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^a} dx^a\right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^b} dx^b\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial \varphi^n}{\partial x^z} dx^z\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

그래서 결국, 우리가 알던 치환적분식이 나오는 것이다.

$$\varphi^* \alpha = f(\varphi(x)) \det\left(\frac{d\varphi^i}{dx^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

example, polar coordinate

$$\begin{array}{ccc} (r, \theta) & \xrightarrow{\varphi} & (x, y) \\ k & & \varphi(k) \end{array}$$

$$x = \varphi^1(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = \varphi^2(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$\varphi^*(dx) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi^1}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$\varphi^*(dy) = \frac{\partial \varphi^2}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi^2}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \varphi^*(dx \wedge dy) &= \varphi^*(dx) \wedge \varphi^*(dy) \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\varphi(k)} dx \wedge dy = \int_k \varphi^*(dx \wedge dy) = \int_k r dr \wedge d\theta$$

두 패치 $\mathcal{J}$ 와 $\mathcal{K}$ 가 차원이 다른 경우로 일반화 해보자.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{K} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^p & & \mathbb{R}^n \\ & \uparrow & \\ & \omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n) & \end{array}$$

$$\int_{\varphi(\mathcal{J})} \omega = \int_{\mathcal{J}} \varphi^* \omega$$

example) $\omega = \omega_i dx^i$, ω 는 1-form 이다.

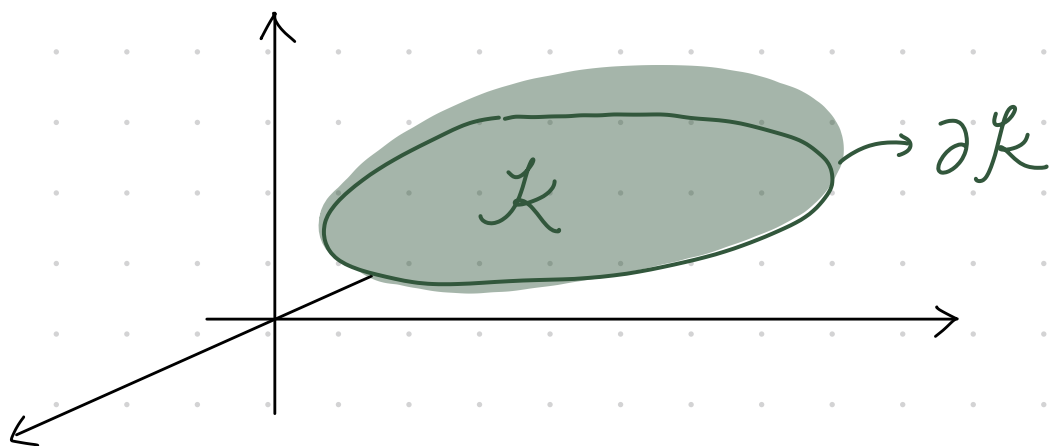
$$\text{Let } \gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$$

이때, $[a, b]$ 가 $\mathcal{J}$ 이고, $\mathbb{R}^n$ 이 $\mathcal{K}$, γ 가 φ 의 역함이다.

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\mathbb{R}} \gamma^*(\omega) = \int_a^b \left(\sum_i \omega_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \right) dt$$

Stoke's theorem



Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a p -dimensional surface

Let ∂K be a boundary of K .

K 의 방향이 ∂K 의 방향을 결정한다.

Let $x \in K$, $\vec{n}_x$ be an outward normal vectorfield on ∂K .

Stoke's theorem, smooth $(p-1)$ -form 인 ω 에 대해서

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$$

Example)

$$n = p = 2$$

$$\omega = \omega_1(x) dx^1 + \omega_2(x) dx^2$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$\iint_K d\omega = \iint_K (\partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial K} \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$$

이게 바로 Green's Theorem 이다.

Example)

$$n = p = 3$$

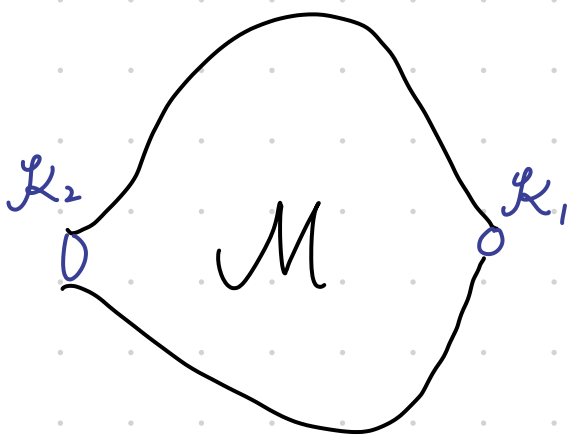
$$\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2$$

$$d\omega = (\partial_1 \omega_1 + \partial_2 \omega_2 + \partial_3 \omega_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$\iiint_K \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_{\partial K} \omega_1(x) dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2(x) dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3(x) dx^1 \wedge dx^2.$$

이것이 바로 가우스 적분 정리다.

An application of stoke's theorem.



이렇게 M 의 boundary가

$$\partial M = K_2 - K_1$$

으로 주어져 있다.

Let ω be a closed form. $d\omega = 0$

$$\int_{K_2} \omega - \int_{K_1} \omega = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = 0$$

$$\int_{K_1} \omega = \int_{K_2} \omega$$

이것이 바로 flux conservation law 이다.

example)

$$\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n), \quad d\alpha = 0$$

Let $p, q \in \mathbb{R}^n$ be two points.

$$\int_p^q \alpha = \int_\gamma \alpha$$

p 와 q 를 이어주는 아무 γ 에 대해 위가 성립.

왜냐면 Stokes theorem 에 의해,

γ_1 으로 부터 smoothly deformed γ_2 이

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha \quad \text{를 성립하기 때문이다.}$$

이게 $d\alpha = 0$ 일 때 α 가 보존장이라는 것.

example) Consider $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ and

$$\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad d\alpha = 0$$

두 점 $p = -1, q = 1$ 을 잇는 두 path γ_1 과 γ_2 를 고려.

γ_1 는 lower semicycle, γ_2 는 upper semicycle.

두 경로 모두 원점을 우회한다.

원점에 구멍이 있어서,

γ_1 을 변형한다고 해서 γ_2 가 되지 못 한다.

공간의 topological effect 가 나타나는 부분.

Circuit C 에 대해,

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = \oint_C \alpha$$

$\alpha = d\theta$ 이라는 polar coordinate 를 사용하면,

$$\oint_C \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$$

교수님이 cohomology group 이란 걸 언급하셨다. 이게 뭘까?

$$\int_{\gamma_1} \alpha \neq \int_{\gamma_2} \alpha \quad \text{라는 점이 명확하다.}$$