

AM 11th week 1 (THU)

오늘의 주제: Cartan formula and Poincaré Lemma

먼저 복습부터 하자.

<Lie derivative> 특징들

① 0-form 에 취했을 때: $\mathcal{L}_V(f) = V(f) \quad \forall f \in \Omega^0(U), f \in C^\infty(U)$

② $\mathcal{L}_V d = d\mathcal{L}_V$

③ $\mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_V \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_V \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^\bullet(U)$

이 세 condition 으로 Lie derivative 의 정의를 끌어내는 게 가능한가?

교수님은 모르겠다고 한다.

<General Differential p-form>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) \\ = \sum_{i_1, \dots, i_p} V(\alpha_{i_1, \dots, i_p}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ + \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} d(V(x^{i_1})) \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d(V(x^{i_p})) \end{aligned}$$

Definition: Interior product

$$i: \text{Vect}(U) \times \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$$

$$(V, \alpha) \longmapsto i_V \alpha$$

form 의 차수를 한 단계 낮춘다.

$$\begin{aligned} i_V \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} (i_V dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad - \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge (i_V dx^{i_2}) \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad + \dots + (-1)^{p-1} \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge (i_V dx^{i_p}) \end{aligned}$$

벡터장을 $V = V^i(x) \partial_i$ 라고 표현할 때, $i_V d\alpha^i = V^i(x)$ 이다.

< Interior product의 성질 >

① i_V is C^∞ -linear $i_V(f\alpha) = f i_V(\alpha)$, f is a C^∞ class 0-form

② $i_V(df) = V(f)$

③ $i_V(\alpha \wedge \beta) = (i_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_V\beta)$ for $\alpha \in \Omega^p(U)$

$d: \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$ form의 차수를 올린다

$\mathcal{L}_V: \Omega^p \longrightarrow \Omega^p$ form의 차수가 그대로

$i_V: \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p-1}$ form의 차수를 내린다.

Cartan magic formula : $\mathcal{L}_V = di_V + i_V d$

$D_V = di_V + i_V d$ 라고 정의한 뒤, D_V 과 $\mathcal{L}_V$ 의 성질과 일치함을 보이자.

① $D_V f = (di_V + i_V d)f = di_V f + i_V df = V(f)$

f 는 0-form 이라서 $i_V f = 0$

② $D_V d = (di_V + i_V d)d = (di_V)d = d(i_V d) = d(di_V + i_V d) = dD_V$

$\therefore D_V d = dD_V$

③ α 는 p-form, β 는 q-form.

$D_V(\alpha \wedge \beta) = (D_V\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (D_V\beta)$

$$D_V(\alpha \wedge \beta) = d\iota_V(\alpha \wedge \beta) + \iota_V d(\alpha \wedge \beta)$$

$$= d((\iota_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \iota_V\beta) + \iota_V(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta)$$

$$= (d\iota_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p-1}(\iota_V\alpha) \wedge d\beta + (-1)^p d\alpha \wedge \iota_V\beta + \alpha \wedge d\iota_V\beta$$

$$+ (\iota_V d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+1} d\alpha \wedge \iota_V\beta + (-1)^p \iota_V\alpha \wedge d\beta + \alpha \wedge \iota_V d\beta$$

$$= (d\iota_V\alpha + \iota_V d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (d\iota_V\alpha + \iota_V d\alpha)\beta$$

$$= D_V\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge D_V\beta.$$

Theorem: Let V & $W \in \text{Vect}(U)$

Then as operators on $\Omega^*(U)$

$$\textcircled{1} [\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] := \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V = \mathcal{L}_{[V, W]}$$

$$\mathcal{L}_V \alpha := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha)$$

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = XY - YX$$

$$\textcircled{2} i_V i_W + i_W i_V = 0$$

$\textcircled{3}$ $\mathcal{L}_V$ 와 d 는 commute 한다. 앞서 증명했듯

$$[\mathcal{L}_V, d] = \mathcal{L}_V d - d \mathcal{L}_V = 0$$

$$\textcircled{4} i_V d + d i_V = \mathcal{L}_V$$

$$\textcircled{5} [\mathcal{L}_V, i_W] = \mathcal{L}_V i_W - i_W \mathcal{L}_V = i_{[V, W]}$$

$$= (i_V d + d i_V) i_W - i_W (i_V d + d i_V)$$

이걸로 $i_{[V, W]}$ 를 어떻게 유도하지?

Poincaré Lemma $\longrightarrow$ 증명을 어떻게 하나? 일단은 받아들이고 넘어가라.

A form α is called closed if $d\alpha = 0$

α is called exact if there exists β such that $\alpha = d\beta$

d^2 이기 때문에, exact form 은 모두 closed form 이다.

Definition) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ is an open set

We define the p -th de Rham cohomology

$$\mathcal{H}_{dR}^p(U) := \frac{\text{closed } p\text{-forms on } U}{\text{exact } p\text{-forms on } U}$$

→ 이 분수 기호가 무슨 의미인가?

example 1) Assume U is connected $\mathcal{H}_{dR}^0(U)$ 를 고려하라.

f 가 closed form 이라면 $df = 0$.

f 는 constant function 이다.

$$\text{따라서 } \mathcal{H}_{dR}^0(U) = \mathbb{R}$$

example 2) $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad \alpha \text{ 는 closed 이지만 exact 하지는 않는다.}$$

이게 1/1/2 connection 하고 연관 있다 하는데...

$$\mathcal{H}_{dR}^1(U) = \text{winding number} = \mathbb{Z}$$

Definition) $U \subset \mathbb{R}^n$ is called "star-shaped" if there is a point $x_0 \in U$ such that for any $x \in U$, the straight interval connecting x and x_0 is contained in U .

질문) 무엇이 straight connecting 인가?

Poincaré Lemma) If an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$ is star-shaped then $\mathcal{H}_{dR}^p(U) = 0$ for any $p > 0$.

즉, 모든 closed form이 exact 하다.

Phase space 는 본질적으로 star-shaped 이다.

그래서 generating function을 고려할 수 있는 거다?

on the phase space $\mathbb{R}^{2n} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

time-dependent transformation is a map

$$\varphi: (\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$$

such that

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i = \sum_i dP_i \wedge dQ_i$$

내적은 보존된다는 의미?

이게 무슨 의미지?

$$d\left(\sum_i dp_i \wedge dq_i - \sum_i dP_i \wedge dQ_i\right) = 0$$

이라는 점에서 phase space 는 명확하게 star-shaped 이다.

F 가 generating function 일 때,

$$dF = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i$$