

AM - 12th week -1 (TUE)

Symplectic form 에 대해 배워보자

Symplectic vectorspace (물리적으로는 phase space 인 곳)

ω is a symplectic form.

Let V be finite dimension real vector space

$\omega: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ and ω is a linear map

ω 는 두개의 벡터장을 받아 1개의 실수를 내뱉는 2-form 이다.

$\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ 이다. 즉, ω 는 skew symmetric (antisymmetric)

$\omega: \wedge^2 V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\wedge^2 V$ 는 $V \times V$ 와 같은 의미

Null space of ω 는 이렇게 정의된다.

$$\mathcal{N} = \{ u \in V \mid \omega(u, v) = 0, \forall v \in V \}$$

말하자면, 하나라도 ω 안에 넣으면 무조건 0 이 나오는 vector field 의 집합.

Definition: A skewsymmetric bilinear map on V , ω is called **non-degenerate** or symplectic if its null space is trivial $\mathcal{N} = \{0\}$

ω is symplectic pairing on V , (V, ω)

모든 물리적 공간은 이 성질을 만족해야 한다.

ω 가 phase space 의 공간적 성질을 결정한다는 점과, 2개의 벡터를 받아 실수를 뱉는 연산이란 점에서,

마치 Riemannian space 에서 metric 의 역할을 연상케 하나,

Metric 은 symmetric 하지만 symplectic form 은 antisymmetric 하다는 점에서 차이가 있다.

Let ω be a symplectic pairing on V

then there exists a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

위 basis 는 phase space 에서 $\{ \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_{p_1}, \partial_{p_2}, \dots, \partial_{p_n} \}$ 과 역할이 같다.

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$$

같은 종류의 basis 끼리는 ω 에 넣으면 0 이 나옴

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} = -\omega(f_j, e_i)$$

이 특성들은 마치 푸아송 괄호와 commutator 를 연상케 한다.

phase space basis 를 이용해 두 특성을 다시 쓰면,

$$\omega(\partial x_i, \partial x_j) = \omega(\partial p_i, \partial p_j) = 0$$

$$\omega(\partial x_i, \partial p_j) = -\omega(\partial p_j, \partial x_i) = \delta_{ij}$$

위를 만족하는 ω 를 직접적으로 나타내면 이렇다.

$$\omega = \sum_{a=1}^n dp^a \wedge dx^a$$

$d\omega = 0$ 이어야 한다. 그 조건을 확인해 보면,

$\{x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n}\}$ 의 coordinate 를 사용할 때,

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

$$d\omega = \frac{1}{2} \sum_{ijk} \partial_k \omega_{ij}(x) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$$

$$= \frac{1}{3!} \sum_{ijk} (\partial_k \omega_{ij} + \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki}) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$$

$d\omega = 0$ 이기 위해, $\partial_k \omega_{ij} + \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} = 0$ 이어야 함을 알 수 있다.

질문: 위 조건이 푸아송 괄호의 Jacobi identity 와 연결되는 걸까?

$d\omega = 0$ 이기에, $\omega = d\alpha$ 를 만족하는 α 가 존재할 수도 있다.

$$\omega = \sum_{a=1}^n dp^a \wedge dx^a \quad \text{같은 경우에는,} \quad \alpha = \sum_{a=1}^n p^a dq^a$$

의문) α 는 곧 action 이다?

다시 $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ basis 표현으로 돌아와서,

Proof, $e_1 \in V$, ω 의 non-degeneracy 에 의해, 무조건 다음을 만족하는 f_1 가 존재.

such that $f_1 \in V$, $\omega(e_1, f_1) = 1$

$\therefore$, conjugate basis 를 항상 찾을 수 있다.

$$U = \text{Span}_R \{e_1, f_1\}$$

$$U^\perp = \{u \in V \mid \omega(e_1, u) = \omega(f_1, u) = 0\}$$

$$\textcircled{1} U \cap U^\perp = \{0\}, \quad V = U \oplus U^\perp$$

$$\textcircled{2} \omega|_{U^\perp} \text{ defines symplectic pairing on } U^\perp$$

지금 하고 있는 접근법은 그람-슈미트 직교화와 유사하다.

Phase-space 는 vector space의 generalization 이다.

Coordinates are just illusions. 그저 표현 방법일 뿐.

ω 를 matrix 로 나타내자.

$\omega_{ij} := \omega(c_i, c_j)$, c_i 와 c_j 는 basis 중 하나.

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

non-degenerate: $\det \omega_{ij} \neq 0$

$$\$ \omega \$^T = S_{ij} \omega_{jk} [S^T]_{kl} = J_{il}$$

그런데 여기서 matrices $\$$ 가 뭐지?

이때, $\mathcal{J}$ 는 우리가 이미 배운 symplectic matrix 다. $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

우리가 지금 배우고 있는 것은 모든 역학을 basis independent 하게 나타내는 방법이다.

$$\tilde{\omega} : \text{Vect}(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{U})$$

$$\nu \mapsto \omega(\nu, -) = i_{\nu} \omega$$

$\tilde{\omega}$ 는 interior product 이다. 벡터를 1-form 으로 만드는 연산.

Null space is kernel of $\tilde{\omega}$. 그런데 kernel 이 뭐지? $N = \ker \omega = \{\nu\}$

$\tilde{\omega}$ 을 이용해 Hamiltonian vector field 를 정의할 수 있다.

Definition) Let $\mathcal{H}$ be a scalar function on $\mathcal{U}$

We define associated Hamiltonian vector field, $V_{\mathcal{H}}$

$$V_{\mathcal{H}} = \tilde{\omega}^{-1}(d\mathcal{H}) \quad \text{z}, \quad \omega(V_{\mathcal{H}}, -) = i_{V_{\mathcal{H}}} \omega = d\mathcal{H}$$

또 다른 말로 하면, for $\forall V \in \text{vect}(\mathcal{U})$, $\omega(V_{\mathcal{H}}, V) = (d\mathcal{H})V$

example.) $\tilde{\omega}^{-1} : \begin{cases} -dp^i \mapsto \partial_{q^i} \\ dq^i \mapsto \partial_{p_i} \end{cases}$

validation: $\omega(\partial_{q^i}, -) = \sum_a dp^a \wedge dq^a(\partial_{q^i}, -) = -\sum_a dq^a \wedge dp^a(\partial_{q^i}, -) = -dp^i$

$$\omega(\partial_{p_i}, -) = \sum_a dp^a \wedge dq^a(\partial_{p_i}, -) = dq^i$$

$$d\mathcal{H} = \sum_i \partial_{p_i} \mathcal{H} dp^i + \partial_{q^i} \mathcal{H} dq^i \quad \text{임을 } \tilde{\omega}^{-1} \text{ 에 적용.}$$

$$\tilde{\omega}^{-1}(d\mathcal{H}) = \sum_i (\partial_{p_i} \mathcal{H}) \tilde{\omega}^{-1}(dp^i) + (\partial_{q^i} \mathcal{H}) \tilde{\omega}^{-1}(dq^i)$$

$$= \sum_i (\partial_{p_i} \mathcal{H}) (-\partial_{q^i}) + (\partial_{q^i} \mathcal{H}) (\partial_{p_i})$$

$$= V_{\mathcal{H}}$$

Hamiltonian
vector field

$$\text{z}, \quad V_{\mathcal{H}} = \sum \frac{d\mathcal{H}}{dq^i} \frac{d}{dp_i} - \frac{d\mathcal{H}}{dp_i} \frac{d}{dq^i} = \{\mathcal{H}, -\} \quad \text{으로, 푸아송 괄호와 결부된다!}$$

질문) 이 논리로 해밀톤 방정식을 나타내면 무슨 식인가?

일 반 화 하면, 모든 scalar function f on $\mathcal{U}$ 에 대해,

$$\{f, -\} = V_f = \tilde{\omega}^{-1}(df)$$

The symplectic Two form ω is invariant

under the flow φ_t generated by a Hamiltonian vectorfield

$$\varphi_t^* \omega = \omega. \quad \omega \text{ 를 pull back 해도 여전히 같다.}$$

$\Updownarrow$

$$\partial_t(\varphi_t^* \omega) = 0 = \mathcal{L}_{V_H} \omega$$

여기 에 magic formula 를 쓰면,

$$(d i_{V_H} + i_{V_H} d) \omega = 0$$

$$d i_{V_H} \omega = d(d\mathcal{H}) = 0. \quad \text{이렇게 증명 끝.}$$

Liouville theorem $\rightarrow$ phase space is incompressible.

$\frac{\omega^n}{n!}$ 은 volum form 이다. 왜 인진 모르겠지만.

$$\varphi_t^* \left(\frac{\omega^n}{n!} \right) = \frac{\omega^n}{n!} \iff \mathcal{L}_{V_H} \left(\frac{\omega^n}{n!} \right) = 0$$

이 부분은 보충 설명이 필요.

어떤 space 에서 라그랑지안이 정의되나? $\rightarrow$ Lagrangian sub-space 에서.

Lagrangian sub-space 는 p 가 ω 에 의한 함수로 고정된 space 이다.

Let (V, ω) , $L \subset V$ is called isotropic

$$\text{if } \omega|_{L \times L} = 0 \quad \omega(u, v) = 0$$

$$\forall u, v \in L$$

$\dim L \leq \frac{1}{2} \dim V$, 운동량은 고정(?) 되고 ω 만 남았기 때문

질문) 그럴 속도의 차원은? 우리 속도 둘 다 차원에 있어야 하지 않나?

$\dim L < \frac{1}{2} \dim V$ 인 경우도 있음에 주목. 아마 자유도 때문)

사실 $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ 이다. 그런데 수학자들은 정확한 정체를 밝히기 보단

기능만을 말해주는 걸 좋아한다.

$$\tilde{\omega} : V \rightarrow V^*$$

$$\tilde{\omega}_L : L \rightarrow \left(\frac{V}{L}\right)^* \rightarrow \text{왜 구간이 이거지? 집합을 나눈다는게 뭐지?}$$
$$u \mapsto \omega(u, -)$$

$\tilde{\omega}_L$ is injective

$$\text{If } u \in L \text{ \& } \tilde{\omega}_L(u) = 0$$

$$\omega(u, v) = 0,$$

$$\dim L \leq \dim \left(\frac{V}{L}\right) = \dim V - \dim L$$

$\rightarrow$ 이 부분은 잘 모르겠는 걸.