

AM 12th week - 2 (THU)

Symplectic manifold $\rightarrow$ closed

Hamiltonian vector field
and master equation of physics

$$\begin{cases} \omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i & (\text{by Newtonian dynamics}) \\ i_{V_{\mathcal{H}}} \omega = d\mathcal{H} & \iff \tilde{\omega}^{-1}(d\mathcal{H}) = V_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

$i_{V_{\mathcal{H}}} \omega = d\mathcal{H}$ 의 의미? : 아아 이 방정식으로 $\mathcal{H}$ 에 의해 $V_{\mathcal{H}}$ 가 결정되는 것이 해밀톤 방정식과 동치일 것이다.

질문: $V_{\mathcal{H}}$ 의 integral curve 인 φ_t 가 운동방정식의 해인가?

symplectic form 은 Hamiltonian vector field 에 의한 evolution 에 invariant 하다.

$$\varphi_t^* \omega = \omega \iff \mathcal{L}_{V_{\mathcal{H}}} \omega = 0$$

Poisson bracket 에 대해 알아보자.

$\mathcal{U}$ 의 두 scalar function $f, g \in C^\infty(\mathcal{U})$ 의 Hamilton vector field 가 V_f 와 V_g 일 때,
푸아송 괄호는 이렇게 정의된다.

$$\{-, -\} : C^\infty(\mathcal{U}) \times C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$$

즉, $\mathcal{U}$ 에서 정의된 2개의 scalar function 을 받아 1개의 scalar function 을 반환

실제 연산은 이렇다.

$$\{f, g\} = i_{V_f} i_{V_g} \omega = i_{\tilde{\omega}^{-1}(df)} i_{\tilde{\omega}^{-1}(dg)} \omega \quad \text{와! 어지러워!}$$

example

Einstein summation convention 사용.

$$\omega = dp^i \wedge dq^i, \quad V_f = V_f^{p^i} \partial_{p^i} + V_f^{q^i} \partial_{q^i}, \quad V_g = V_g^{p^i} \partial_{p^i} + V_g^{q^i} \partial_{q^i}$$

$$df = (\partial_{p^i} f) dp^i + (\partial_{q^i} f) dq^i, \quad dg = (\partial_{p^i} g) dp^i + (\partial_{q^i} g) dq^i$$

$$V \text{ 들의 계수 결정, 다음 관계를 이용 } \begin{cases} \tilde{\omega}^{-1}(dp^i) = -\partial_{q^i} \\ \tilde{\omega}^{-1}(dq^i) = \partial_{p^i} \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}^{-1}(df) = (\partial_{p^i} f) \tilde{\omega}^{-1}(dp^i) + (\partial_{q^i} f) \tilde{\omega}^{-1}(dq^i) = -(\partial_{p^i} f) \partial_{q^i} + (\partial_{q^i} f) \partial_{p^i} = V_f$$

$$V_f^{q^i} = -\partial_{p^i} f, \quad V_f^{p^i} = \partial_{q^i} f, \quad V_g^{q^i} = -\partial_{p^i} g, \quad V_g^{p^i} = \partial_{q^i} g$$

$$i_{V_f} i_{V_g} \omega = i_{V_f} (V_g^{p^i} dq^i - V_g^{q^i} dp^i) = V_f^{q^i} V_g^{p^i} - V_f^{p^i} V_g^{q^i} = (\partial_{q^i} f)(\partial_{p^i} g) - (\partial_{q^i} g)(\partial_{p^i} f)$$

이렇게 우리가 원래 알던 푸아송 괄호 식이 나온다. 그럼에도 미분기하 방식의 정의가 유용한 이유는 좌표계에 의존하지 않고 구조를 나타낼 수 있기 때문이다.

Hamiltonian vector field 의 정의에 따라,

$$\omega(V_g, -) = i_{V_g} \omega = dg \quad \text{이므로,}$$

$$i_{V_f} i_{V_g} \omega = i_{V_f}(dg) = V_f(g) \quad \text{의 관계가 나온다.}$$

$$\therefore \{f, g\} = V_f(g) = \omega^{-1}(df)(g)$$

지난 강의 노트에서 $V_f = \{f, -\}$ 를 유도한 것과 직결된다.

더 general 한 symplectic 2-form 에 대해 전개를 이어가 보자.

dx^i (i 는 $2N$ 까지) 가 1-form basis 일 때,

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

$$\tilde{\omega} : \partial_k \longmapsto \sum_i^{2N} \omega_{ki} dx^i$$

증명 $\tilde{\omega}(\partial_k) = \omega(\partial_k, -)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} (\delta_{ik} dx^j - \delta_{jk} dx^i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\omega_{kj} dx^j - \omega_{ik} dx^i) \quad \text{↗ } -\omega_{ik} = \omega_{ki}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j (\omega_{kj} dx^j) + \frac{1}{2} \sum_i \omega_{ki} dx^i$$

$$= \sum_i \omega_{ki} dx^i$$

$$\tilde{\omega}^{-1} : dx^k \longmapsto \sum_i^{2N} \omega^{ki} \partial_i \quad \text{이때, } \omega^{ki} \text{ 는 } \omega \text{ 의 역행렬, } \sum_i \omega^{ki} \omega_{ij} = \delta_j^k$$

증명 $\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^{-1}(dx^k)) = dx^k$ 가 됨을 보여라.

$$\tilde{\omega}\left(\sum_i \omega^{ki} \partial_i\right) = \sum_i \omega^{ki} \tilde{\omega}(\partial_i) = \sum_{i,j} \omega^{ki} \omega_{ij} dx^j = \sum_j \delta_j^k dx^j = dx^k$$

그럼, Hamiltonian vector field 를 명시적으로 나타내면, 다시 Einstein summation convention 을 사용할 때,

$$df = (\partial_i f) dx^i$$

$$V_f = \tilde{\omega}^{-1}(df) = (\partial_i f) \tilde{\omega}^{-1}(dx^i) = \omega^{ij} (\partial_i f) \partial_j$$

푸아송 괄호를 계산하면,

$$\{f, g\} = V_f(g) = \omega^{ij} (\partial_i f) (\partial_j g)$$

푸아송 괄호는 다음 성질을 만족한다.

- ① $\{f, g\} = -\{g, f\} \rightarrow$ anti symmetry. 이 성질은 ω_{ij} 의 anti symmetry 를 물려받은 것이다.
- ② $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \rightarrow$ associativity
- ③ $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \rightarrow$ Jacobi identity, consistency relation

증명

$$\begin{aligned} \text{②} \rightarrow \{f, gh\} &= V_f(gh) = \omega^{ij}(\partial_i f)(\partial_j gh) = \omega^{ij}(\partial_i f)\{g\partial_j h + (\partial_j g)h\} \\ &= gV_f(h) + \{V_f(g)\}h = g\{f, h\} + \{f, g\}h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= V_f(V_g(h)) + V_g(V_h(f)) + V_h(V_f(g)) \\ &= \omega^{ij}(\partial_i f)\{\partial_j \omega^{kl}(\partial_k g)(\partial_l h)\} + \dots + \dots \\ &= (\partial_i f)(\partial_k g)(\partial_l h)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl} + \omega^{ij}\omega^{kl}\partial_i f\{\partial_j(\partial_k g)(\partial_l h)\} \\ &\quad + \dots + \dots \\ &= A(f, g, h) + B(f, g, h) \end{aligned}$$

이때, $A(f, g, h) = (\partial_i f)(\partial_k g)(\partial_l h)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl} + (\partial_i g)(\partial_k h)(\partial_l f)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl} + (\partial_i h)(\partial_k f)(\partial_l g)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl}$

$$B(f, g, h) = \omega^{ij}\omega^{kl}\partial_i f\{\partial_j(\partial_k g)(\partial_l h)\} + \omega^{ij}\omega^{kl}\partial_i g\{\partial_j(\partial_k h)(\partial_l f)\} + \omega^{ij}\omega^{kl}\partial_i h\{\partial_j(\partial_k f)(\partial_l g)\}$$

$A(f, g, h)$ 와 $B(f, g, h)$ 의 계산 결과를 따로 비교해 보자.

먼저 $A(f, g, h)$ 에 대해,

$$(\partial_i f)(\partial_k g)(\partial_l h)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl} + (\partial_i g)(\partial_k h)(\partial_l f)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl} + (\partial_i h)(\partial_k f)(\partial_l g)\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl}$$

$(l, i, k) \rightarrow (i, k, l) \qquad (k, l, i) \rightarrow (i, k, l)$

$$= (\partial_i f)(\partial_k g)(\partial_l h)\{\omega^{ij}\partial_j \omega^{kl} + \omega^{kj}\partial_j \omega^{li} + \omega^{lj}\partial_j \omega^{ik}\}$$

이때, $d\omega = 0$ 에 의해 $\partial_k \omega_{li} + \partial_i \omega_{kl} + \partial_l \omega_{ik} = 0$ 인 걸 이용한다.

아랫첨자 ω 의 미분과 윗첨자 ω 의 미분 사이 관계식을 구해야 하므로 복잡한 과정을 거친다.

역행렬 관계에 의해, $\omega^{ir}\omega_{rk} = \delta^i_k$

이를 ∂_k 로 미분 $(\partial_j \omega^{ir})\omega_{rk} + \omega^{ir}\partial_j \omega_{rk} = 0$

윗첨자의 미분만을 남기기 위해 ω^{kl} 을 곱한다. $(\partial_j \omega^{ir})\omega_{rk}\omega^{kl} + \omega^{ir}\omega^{kl}\partial_j \omega_{rk} = \partial_j \omega^{il} + \omega^{ir}\omega^{kl}\partial_j \omega_{rk} = 0$

결국, $\partial_j \omega^{li} = \omega^{ir}\omega^{kl}\partial_j \omega_{rk}$

우변에서 r 과 k 는 summation 되는 dummy index임을 알수 있다. $r \rightarrow a, k \rightarrow b$ 로 표기를 바꾸면,

$$\partial_j \omega^{li} = -\omega^{ai}\omega^{bl}\partial_j \omega_{ab}$$

이것을 $\omega^{ij} \partial_j \omega^{kl} + \omega^{kj} \partial_j \omega^{li} + \omega^{lj} \partial_j \omega^{ik}$ 에 대입

$$- \omega^{ij} \omega^{al} \omega^{bk} \partial_j \omega_{ab} - \omega^{kj} \omega^{ai} \omega^{bl} \partial_j \omega_{ab} - \omega^{lj} \omega^{ak} \omega^{bi} \partial_j \omega_{ab}$$

미분항 앞에 붙은 계수를 똑같이 맞추고 싶다. dummy index 는 j, a, b 이므로,

두 번째 항에 index 변환 $(a, b, j) \rightarrow (j, a, b)$ 세 번째 항에 index 변환 $(b, j, a) \rightarrow (j, a, b)$

$$- \omega^{ij} \omega^{al} \omega^{bk} \partial_j \omega_{ab} - \omega^{kb} \omega^{ji} \omega^{al} \partial_b \omega_{ja} - \omega^{la} \omega^{bk} \omega^{ji} \partial_a \omega_{bj}$$

$$= -(\omega^{ij} \omega^{la} \omega^{kb}) \{ \partial_j \omega_{ab} + \partial_b \omega_{ja} + \partial_a \omega_{bj} \}$$

$d\omega = 0$ 에 의해, $\{ \}$ 내부는 0 이다.

따라서 $A(f, g, h) = 0$

이제 $B(f, g, h)$ 를 확인.

$$B = \omega^{ij} \omega^{kl} \partial_i f \{ \partial_j (\partial_k g) (\partial_l h) \} + \dots + \dots$$

$$= \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_j \partial_l h) + \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i f) (\partial_l h) (\partial_j \partial_k g) \\ + \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i g) (\partial_k h) (\partial_j \partial_l f) + \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i g) (\partial_l f) (\partial_j \partial_k h) \\ + \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i h) (\partial_k f) (\partial_j \partial_l g) + \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i h) (\partial_l g) (\partial_j \partial_k f)$$

$(i, k, l) \rightarrow (k, l, i)$

$$= \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_j \partial_l h) + \omega^{ij} \omega^{kl} (\partial_i f) (\partial_l h) (\partial_j \partial_k g) \\ + \omega^{kj} \omega^{li} (\partial_k g) (\partial_l h) (\partial_i \partial_j f) + \omega^{kj} \omega^{li} (\partial_k g) (\partial_i f) (\partial_j \partial_l h) \\ + \omega^{lj} \omega^{ik} (\partial_l h) (\partial_i f) (\partial_j \partial_k g) + \omega^{lj} \omega^{ik} (\partial_l h) (\partial_k g) (\partial_i \partial_j f)$$

$(i, k, l) \rightarrow (l, i, k)$

$$= (\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_j \partial_l h) (\omega^{ij} \omega^{kl} + \omega^{kj} \omega^{li}) \\ + (\partial_k g) (\partial_l h) (\partial_i \partial_j f) (\omega^{kj} \omega^{li} + \omega^{lj} \omega^{ik}) \\ + (\partial_l h) (\partial_i f) (\partial_j \partial_k g) (\omega^{lj} \omega^{ik} + \omega^{ij} \omega^{kl})$$

summation을 하면 ω 의 anti-symmetry 에 의해 0 이 된다.

$(\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_j \partial_l h) (\omega^{ij} \omega^{kl} + \omega^{kj} \omega^{li}) = 0$ 임을 대표로 확인해 보면,

$(j, l) \rightarrow (l, j)$ 로 index 를 뒤바꾸어도, 식은 똑같은 값을 가져야 한다.

$$(\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_l \partial_j h) (\omega^{il} \omega^{kj} + \omega^{kl} \omega^{ji}) = (\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_l \partial_j h) (-\omega^{kl} \omega^{ij} - \omega^{li} \omega^{kj})$$

$$\text{결국 } (\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_j \partial_l h) (\omega^{ij} \omega^{kl} + \omega^{kj} \omega^{li}) = -(\partial_i f) (\partial_k g) (\partial_j \partial_l h) (\omega^{ij} \omega^{kl} + \omega^{kj} \omega^{li})$$

이므로 0 이다.

이렇게 Jacobi identity 증명 끝

$[V_f, V_g] = V_{\{f, g\}}$ poisson bracket과 commutator가 연결되는 순간.

증명) $i_{[V_f, V_g]} \omega = [\mathcal{L}_{V_f}, i_{V_g}] \omega = \mathcal{L}_{V_f} i_{V_g} \omega = \mathcal{L}_{V_f} dg = di_{V_f} dg = d\{f, g\}$

증명 과정이 이해 안 되긴 하지만 일단 받아들이고 넘어가자.

이게 Floer Homology 와 관련있다고 하는데 무슨 의미인지 모르겠다.

모든 phase space는 locally equivalent 하다. $\rightarrow$ 따라서 phase space는 topology로만 class를 나누는 게 가능하다.

Darboux theorem

$\mathbb{R}^{2N}$ space에 있는 그 어떤 symplectic form도 local하게는 standard symplectic form $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ 꼴로 coordinate transform 할 수 있다. 아마도 이 개념이 canonical transform과 연관될 것이다.

Theorem

O 를 포함하는 $\mathbb{R}^{2n}$ space에서 ω 가 symplectic form이라 두자.

O 의 이웃 U 에서 이러한 성질을 만족하는

coordinate function $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ 이 있다.

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \quad \text{on } U$$

증명하기 전에, flow on the time-dependent vector field에 대해 알아 보자.

V_t 가 time dependent vector field일 때, 이것의 flow φ_t 는 다음식을 만족.

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t = V_t(\varphi_t)$$

질문) 여기서 말하는 time은 어떻게 정의되는 거지?

Proposition) α 가 U 에서 정의된 form 일 때, ($\exists \alpha, \alpha \in \Omega^k$ 일 때)
다음 식이 만족된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* \alpha) = \varphi_t^* (\mathcal{L}_{V_t} \alpha)$$

Lie derivative 의 정의가 $\mathcal{L}_V \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* (\alpha)$ 였던 걸 생각하면, 위 식의 의미는 ...
대체 뭐지?!

증명) 교과서의 증명을 따라가자. 스칼라 함수 f 에 대해, $\alpha = f$ 일 때와 $\alpha = df$ 일 때 증명.

먼저 $\alpha = f$ 일 때, $\varphi_t^* (f) = f(\varphi_t(x))$, 그리고 0-form f 에 대해, $\mathcal{L}_V f = V(f)$ 임을 이용.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* f)(x) &= \frac{\partial}{\partial t} (f(\varphi_t(x))) = \frac{\partial \varphi_t^i(x)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi_t(x)) = V_t^i(\varphi_t(x)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi_t(x)) \\ &= \mathcal{L}_{V_t} f(\varphi_t(x)) = (\varphi_t^* (\mathcal{L}_{V_t} f))(x) \end{aligned}$$

$\alpha = df$ 일 때 증명

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* df) = d\left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* f\right) = d(\varphi_t^* \mathcal{L}_{V_t} f) = \varphi_t^* (d \mathcal{L}_{V_t} f) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{V_t} (df)$$

사실 이 증명과정들이 별로 와 닿지는 않는다.

이제 Darbox theorem 을 증명하자. Moser's trick 이라 부르는 것을 이용해 증명할 것이다.

ω 의 일반형 $\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$ 에 대해,

$\omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(0) dx^i \wedge dx^j$ 라고 두자.

$d(\omega - \omega_0) = 0$ 이므로 $\rightarrow ?$ 왜?

Poincare lemma 에 의해 $\omega - \omega_0 = d\beta$ 를 만족하는 1-form β 가 0의 이웃 영역에서 존재한다.

Proposition 3.3.17. Let α be a differential form on $\mathcal{U}$. Then

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* \alpha) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{V_t} \alpha)$$

wherever defined.

Proof: We show the above formula is true for $\alpha = f$ and $\alpha = df$ where f is a function. Then the above formula holds for a general differential form.

• $\alpha = f$.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* f)(x) = \frac{\partial}{\partial t}(f(\varphi_t(x))) = \frac{\partial \varphi_t^i(x)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi_t(x)) = V_t^i(\varphi_t(x)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi_t(x)) = (\varphi_t^*(\mathcal{L}_{V_t} f))(x).$$

• $\alpha = df$.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* df) = d\left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* f\right) = d(\varphi_t^* \mathcal{L}_{V_t} f) = \varphi_t^*(d\mathcal{L}_{V_t} f) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{V_t}(df).$$

Proof of Darboux Theorem. The proof is based on the so-called Moser's trick. Let

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j.$$

Let $\omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(0) dx^i \wedge dx^j$. Since $d(\omega - \omega_0) = 0$, Poincaré Lemma implies that $\omega - \omega_0 = d\beta$ in some open neighborhood $\mathcal{U}$ of 0 for a 1-form β . Put

$$\omega_t = \omega_0 + td\beta.$$

ω_t 가 ω_0 로 변환될 수 있다는 걸 보이는 게 목표?

이게 뭐가 trick 이라는 거야?

Taking $\mathcal{U}$ smaller if necessary, we may assume ω_t is non-degenerate on $\mathcal{U}$ for any $t \in [0, 1]$. Define a time-dependent vector field V_t on $\mathcal{U}$ by

$$\iota_{V_t} \omega_t = -\beta.$$

Since $(\omega - \omega_0)|_{x=0} = 0$, β and hence V_t vanishes at $x = 0$. Let φ_t be the flow of V_t . Then $\varphi_t(0) = 0$. We can find a smaller neighborhood $\tilde{\mathcal{U}}$ of 0 such that

↓
교수님은 이게 조금 거라
하는데? 나쁜 교재서가
맞는 거 같음.

$$\varphi_t : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$$

smaller → larger

is defined for $t \in [0, 1]$. Consider $\varphi_t^* \omega_t$ on $\tilde{\mathcal{U}}$. By the Proposition above,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* \omega_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{V_t} \omega_t + \frac{\partial}{\partial t} \omega_t) = \varphi_t^*(d\iota_{V_t} \omega_t + d\beta) = \varphi_t^*(-d\beta + d\beta) = 0.$$

So

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* \omega_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{V_t} \omega_t + \frac{\partial}{\partial t} \omega_t) = \varphi_t^*(d\iota_{V_t} \omega_t + d\beta) = \varphi_t^*(-d\beta + d\beta)$$

$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ for all $t \in [0, 1]$.

모든 t 에서 ω_t 는 ω_0 로 변환될 수 있다.

$t=0$ 가 아니라 아무 t 로 pull back
한다?

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* \omega) = \mathcal{L}_{V_{t=0}} \omega$$

이게 Lie derivative의 정의를

□ 전부터 phase
space가 $\mathbb{R}^{2n}$ 에
속해 있기
때문에.

$\mathbb{R}^{2n}$ 이라서
무조건 star-shaped
인가?

모든 phase
space 에서
이 조건은 만족!

이게 왜?

공간이 star shaped 이기 때문에

→ 공간이 star shape 가
아니면

$$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$$

같은 만족하는 φ_t^* 를
찾을 수 있는가? →

맞다고 한다.

여기서 V_t 는 어떻게 정해지는 거지? 왜?

어느 시간 t 이든

↗ $\varphi_t^* \omega_t$ 가
같다.

It follows that

$$\varphi_1^* \omega = \omega_0$$

or equivalently $\omega = (\varphi_1^{-1})^* \omega_0$. Let

$$\varphi_1^{-1} : (x^1, \dots, x^{2n}) \mapsto (y^1 = y^1(x), \dots, y^{2n} = y^{2n}(x)).$$

Then the functions $y^1(x), \dots, y^{2n}(x)$ will satisfy

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(0) dy^i \wedge dy^j.$$

By Prop 3.3.2, a further linear transformation $\{y^1, \dots, y^{2n}\} \mapsto \{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ gives coordinate functions $q_1(x), \dots, q_n(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ such that $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i(x) \wedge dq_i(x)$. $\square$

Gaussian coordinate가 뭐죠?

민코프스키 공간에서 Curvature correction.

Constraint가 있어서 phase space가 $\mathbb{R}^{2n}$ 이 아니라
torus라거나... 그러면)