디락은 constraint system을 2nd class 와 1st class 로 나누었다.

이것은 constraint eq.의 consistancy condition으로 나뉜다.

그러니까 $\{H, \phi\}$ 이 결정한다는 거다. 이것의 inverse가 있다면 2nd class 이고,

없다면 1st class 인 것이다. constraint 가 게이지 변환의 generator 이었다.

이것을 저번 시간에 공부했다고 한다!

오늘은 1st class constant system 의 예시를 볼 거다.

밤에는 2nd class constraint system의 예시를 볼 거다.

질문) 고전 역학을 양자화한다는게 경로적분에서 phase가 생기는 것과 연관 있을까? 이것을 $[\,,\,] \rightarrow \{\,,\,\}$ 로 연관지을 수 있을까?

constraint 가 0이므로, 이것(generator) 에 대한 뇌터 charge는 0 이어야 한다. 질문) 뇌터 charge 가 뭐였는지 잊었다.

① free spinless particle.

그냥 시간이다.

질량과 공간의 형태가 constraint를 준다는 뜻인가?

$$I(x,\lambda) = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \underline{\lambda (p^2 + m^2)} \right)$$

m은 mass.

λ는 Lagrange multiplyer. $p^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}\cdot\vec{p}$

그래서... p_μ 가 뭘까. 공간을 결정하는 matric 인가? 일반상대론 개념이라 한다.

x, y, z, t 까지 포함한 위상공간이다.

② $$I[A_i, A_0, E_i] = \int d^4x \left\{ E_i \dot{A}^i - \left(\frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2\right) + A_0 \partial_i E \right\}$$

A_0는 라그랑주 승수 F는 자기장.

가우스 법칙은 gauge transform의 generator 이다.

$i \in 1,2,3.$ 공간은 3차원, 시공간은 4차원.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$I_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$\mu\nu$랑 ij가 순회하는 범위가 다른 듯.

$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \right)$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\dot{A}_i - \partial_i A_0)(\dot{A}^i - \partial^i A_0) - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \right\}$$

$$I_{EM} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\dot{A}_i \dot{A}^i - \dot{A}_i \partial^i A_0 + \frac{1}{2}\partial_i A_0 \partial^i A^0 - \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \right\}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0.$$ → 이게 맥스웰 방정식. 이면서 라그랑주. 오일러 방정식.

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \Rightarrow \dot{A}_i = \pi_i + \partial_i A_0.$$

이걸 풀면 해밀토니안이 그대로 $\mathcal{H} = \pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L}$ 이 나온다고 한다.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbb{E}\cdot\mathbb{E} + \mathbb{B}\cdot\mathbb{B}) - A_0 \partial \mathbb{E}$$ 로 나온다고 한다.

constraint 에 의해 modified Hamiltonian.

$$I_{EM}[A_i, \pi_i, A_0] = \int d^4x \left\{ \pi_i \dot{A}^i - \left(\frac{1}{2}\pi_i \pi^i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\right) + A_0 \partial_i \pi^i \right\}$$

$\phi = \partial_i \pi^i = \nabla\cdot\mathbb{E}$ → 이거 왜 이런 거지? π 가 E 인가봄. A에 상응하는 운동량이 E?

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial A^i} \qquad \dot{A}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} \qquad \phi = 0.$$

$\dot{\phi} = \{\phi, \mathcal{H}\} = 0$ 이걸 보여라.

$$\{\phi(x), \mathcal{H}(x')\} = \left\{ \partial_i \pi^i(x), \frac{1}{2}\left(\pi_i(x')\pi^i(x') + F_{ij}(x')F^{ij}(x')\right) - \frac{1}{2}A_0(x')\partial_i \pi^i(x') \right\}$$

$$\{\cdot,\cdot\} = \frac{\partial}{\partial A^i}\frac{\partial}{\partial \pi^i} - \frac{\partial}{\partial \pi^i}\frac{\partial}{\partial A^i}$$

푸아송 괄호의 성질에 따라, 아래 규칙을 따른다고 가정한다.

$$\{\pi_i(x), \pi_j(x')\} = 0 \qquad \{A_i(x), A_j(x')\} = 0 \qquad \{A_i(x), \pi_j(x')\} = \delta_{ij}\delta^3(x-x')$$

왜 푸아송 괄호 계산하는 데에 다른 위치에서 두 물리량을 고려하지?

맥스웰 방정식이 각자 전기장과 자기장이 가질 수 있는 형태를 제한했다.
이게 constraint 로 라그랑주 역학에 반영되는 것이다.

$$\frac{d\phi}{dt} = \{\phi, \mathcal{H}\} = \underbrace{-2\left(\partial_k \partial_i' \delta(x-x')\right) F^{ik}(x')}_{\text{이건 symmetric property 로 증명 가능.}} = 0$$

이게 consistancy condition으로 작용한다고?

저번 시간 게이지 변환의 general 한 form 를 배웠을때

$$\delta q^i = \{q^i, \phi_a\} \epsilon^a(t) \qquad \delta p^i = \{p_i\ \phi_a\} \epsilon^a(t)$$

$$\delta \lambda^c = \dot{\epsilon}^c(t) + \epsilon^a(t)\, C_a^c - \lambda^a \epsilon^b(t)\, C_{ab}^c$$

↳ 이게 Λ랑 똑같은 건가? 아닐 것 같은데.

$$\Phi[\Lambda(x)] = \int d^3x\ \Lambda(x)\ \underbrace{\partial_i \pi^i(x)}_{\text{이건 } \nabla\cdot E}$$

$$\delta A_i(x) = \{A_i(x,t), \Phi(\Lambda(x'))\}$$

$$= \int d^3x'\ \Lambda(x',t)\ \partial_j' \underbrace{\{A_i(x,t), \pi^j(x',t)\}}_{\delta_i^j \delta^3(x-x')}$$

$$= -\partial_i \Lambda(x,t).$$

Φ랑 ϕ랑 같은 거였다. $\phi = \partial_i \pi^i = 0$. 가우스법칙.

Λ는 게이지 변환을 위한 infinitesimal한 변화인듯.

게이지 변환에서 전기장이 변치 않듯, $\delta\pi$ 또한 그대로여야 한다.

$$\delta \pi_i(x,t) = \{\pi_i(x,t), \Phi[\Lambda(x',t)]\}$$

$$= \int d^3x'\ \Lambda(x',t)\ \{\pi_i(x,t), \partial_j \pi^j(x',t)\}$$

질문) δ 계산할 때 {변화하는 물리량, 변환의 generator}

이렇게 계산하는 게 맞나? → 응, 맞음. 그런데 증명은 어떻게 하지?

액션은 게이지 변환에 어떻게 변하나? $I = \int d^4x \{\pi_i \dot{A}^i - \frac{1}{2}(\pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}) + A_0 \partial_i \pi^i\}$

$$\delta I = \int d^4x \{\pi_i \delta \dot{A}^i + \delta A_0\, \partial_i \pi^i\}$$

K가 언제 튀어나왔는지 모르겠는데.

$$\delta I = \int d^4x \{\partial_\mu K^\mu + \partial_i \pi^i (\delta A_0 + \partial_0 \Lambda)\}$$

자주 $\delta A_\mu = -\partial_\mu \Lambda$ 가 general structure 라고 한다.

이 내용에서 { }를 Lie bracket으로 바꾸면 포톤이 된다고 한다.

돌아가면 방정식의 제한이 constraint가 된다는것을 더 살펴봐야 한다.

다른 예시로 넘어가자 spinless relativistic point particle.

디락 방정식을 고전역학 버전으로 만들자.

$$I = -m\int dt \sqrt{-\frac{dX^\mu}{dt}\frac{dX^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}} = -m\int d\tau \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}}$$

공간에서 가장 짧은 거리의 경로가 free particle의 이동경로다.

물리와 상관없는 임의적인 좌표계 선택의 자유도는 운동방정식을 바꾸지 않는다.

$$p_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{m\dot{x}_\nu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}}$$

이러면 $p_\nu p^\nu + m^2 = 0$ 이라는 constraint 가 나온다.

괘... 이러지? 이게 ㉠ 왜 constraint 가 되는 거지?

㉠ $\mathcal{H} = 0$ 이다. $\phi = p_\nu p^\nu + m^2$ 이다.

해밀톤 방식으로 쓰면

$$I = \int dt \left(p\dot{x} - 0 + \lambda\phi\right)$$

$$\mathcal{H}_{effective} = -\lambda\phi$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = \frac{\partial \lambda}{\partial X}\phi$$

$\dot{X}$

라그랑지안에서 그 변수에 시간 미분이 등장하지 않는 변수는 모두 Lagrange multiplyer 이다?

Lagrange multiplyer 가 또 다른 물리량이라는 점이 어색하게 느껴진다.