상대론적 spin=0 입자.

ds는 space-time 에서 미소 길이 η는 민코프스키 matric

$$I = -m\int ds = -m\int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

-1은 시간을 위한 항. $c=1$로 빛의 속도를 1로 두었을 때.

갈릴레이 공간에서 $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 인 게 맞나? 아닌 거 같은데?

$\tau' = \tau + \varepsilon(\tau)$ 의 변환에서 $\delta I = 0$ 이다.

$\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} = \sqrt{-\dot{x}^2}$ 이라 표기.

$$\delta I = -m\int d\tau \frac{-\dot{x}^\mu \delta\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}$$

$$= -m\int d\tau \left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{-\dot{x}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \delta x_\mu \right) - \left\{ \frac{d}{d\tau} \frac{-\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right\} \delta x_\mu \right]$$

적분 내부 항이 운동 방정식이다.

르장드르 변환을 하자.

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{m\dot{x}_\nu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}$$

모든 $\nu = 0, 1, 2, 3$ 에 대해 위 식은 독립적인 것 같지만, 사실

$p_\mu p^\mu + m^2 = 0$ 임을 알 수 있다. 이게 constraint 인 것.

이래서 invert가 불가능하고, 바로 해밀토니안을 찾는 게 힘들다.

Polyakov action. → 라그랑지안을 다르게 표현.

$$I[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \frac{1}{2}\int d\tau \frac{1}{e(\tau)}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - e m^2$$

e를 라그랑주 승수로 쓰고, 이미 라그랑지안에 constraint를 준 것.

질문) 첫 식에는 라그랑지안에 명시적인 constraint가 없었는데, 왜 해밀토니안으로 바꾸려고 하니까 constraint가 생기는가?

$$\tau \to \tau'(\tau) \qquad e \to e'(\tau') = e(\tau)\frac{d\tau}{d\tau'}$$

e는 마치 벡터처럼 변환된다.

$$\tau' = \tau + \varepsilon(\tau), \qquad \frac{d\tau'}{d\tau} = 1 + \frac{d\varepsilon}{d\tau}.$$

$$e'(\tau+\varepsilon(\tau)) = e(\tau)(1+\dot{\varepsilon})$$

$$\delta x^\mu(\tau) = -\varepsilon(\tau)\dot{x}^\mu \qquad \delta e(\tau) = -\frac{d}{d\tau}(\varepsilon(\tau)e(\tau))$$

$$\delta I = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ \frac{2e\dot{x}^\mu \delta\dot{x}_\mu - \dot{x}^2\delta e}{e^2} - m^2\delta e \right\}$$

위의 식을 대입

$$\delta I = -\frac{1}{2}\int d\tau \frac{d}{d\tau}\left\{\epsilon(\tau)\left(\frac{\dot{x}^2}{e(\tau)} - m^2 e\right)\right\}$$

역시 $\delta I = 0$ 이다.

$K = -\epsilon(\tau) L$ 이 되지

이제 해밀토니안을 구할 수 있다.

해밀토니안은 $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$ 이라는 constraint로만 이루어졌다.

아마 이 constraint는 광속을 넘지 못한다는 제한 같다.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}e(p_\mu p^\mu + m^2)$$

왜 constraint 없는 $\mathcal{H}_0$은 없는가? 시간에 대한 generator가 없고, time translator가 없다, 이미 시간을 시공간 안의 축으로 넣었기 때문.

질문) δ 계산하는 거 대체 무슨 논리인지 모르겠다.

왜 $\delta x^\mu = \{x^\mu, \epsilon(\tau)\frac{1}{2}(p^2+m^2)\}$ 으로 계산하지?

$\epsilon(\tau)\frac{1}{2}(p^2+m^2)$이 해밀토니안인데, 지금 해밀토니안은 무엇에 대한 generator지? τ에 대한?

잠깐, 여기서 τ 가 뭐지? 시공간 전체에 적분하는 건가?

만약 그렇다면, 시간 축을 광속에 가깝게 변환하는 게 제한 받을텐데?

상대론 파트 들어오고 나서 모든 게 헷갈리기 시작,

아니 τ 로 적분해서 액션 구했으면 해밀토니안은 τ 에 대한 generator 가 되어야 하지 않나?

디랙의 첫번째 constraint type 이라면 그 이론은 게이지 이론이라 부른다.

라그랑주

로렌츠 힘. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{q}{c}\dot{x}\cdot A - V(r)$

A는 자기벡터 포텐셜. Landau gauge.

미지의 변수보다 방정식이 더 적을 때, 답을 어떻게 정해야 하는가?

2차원에서 풀어보자.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{q}{c}\cdot\frac{B}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x,y)$$

equation of motion.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{qB}{c}\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{qB}{c}\dot{x} \end{cases}$$

강한 자기장! $\frac{qB}{mc} \gg 1$

가속도 항은 무시해 버린다.

$$\begin{cases} \dot{y} = +\frac{c}{qB}\frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{x} = -\frac{c}{qB}\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

그냥 커플링된 미분방정식.

이걸 양자화 해보자. 이 식의 크기를 작게 만든다는 게 수학적으로 뭔가?

해밀토니안을 구하자

$$\begin{cases} p_x = -\frac{qB}{2c}y \\ p_y = \frac{qB}{2c}x. \end{cases}$$

운동량인데 속도 항이 없어!

이건 속도항에 운동량으로 식을 대체할 수 없다.

이런 경우, 운동량은 constraint 를 만든다.

H를 실제로 계산해 보면 $\mathcal{H} = V(x, y)$ 만 남는다!

x와 y가 커플링 되었다는 건 자유도가 4에서 2로 줄어들었는을 의미

constraint를 설정한다.

$$\phi_1 = p_x + \frac{qB}{2c} y = 0$$

$$\phi_2 = p_y - \frac{qB}{2c} x$$

$$H = V$$

effective hamiltonian

$$H^* = V + u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2$$

u는 라그랑주 승수.

constraint는 시간이 지나도 불변이므로,

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H^*\} = 0$$

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, \mathcal{H}^*\} = 0$$

$\mathcal{H}^*$ 안에 이미 ϕ들이 있으므로,

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, \mathcal{H}^*\} = \{\phi_1, V\} + u_1\{\phi_1, \phi_1\} + u_2\{\phi_1, \phi_2\}$$

푸아송 괄호의 기본 성질을 이용해 계산하라.

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} + u_2 \frac{qB}{c} = 0 \qquad u_2 = \frac{c}{qB}\frac{\partial V}{\partial x}$$

라그랑주 승수가 field를 만든다. $\quad u_1 = -\frac{c}{qB}\frac{\partial V}{\partial y}$

해밀톤 방정식은 결국

$$\dot{x} = \{x, \mathcal{H}^*\} = -\frac{c}{qB}\frac{\partial V}{\partial y} = u_1$$

왜 속도가 라그랑주 승수로 나오는 것일까!

- 끝 -

Dirac bracket

$$\dot{\phi}_j = \{\phi_j, \mathcal{H}\} + \sum_k u_k \{\phi_j, \phi_k\} = 0$$

$$M_{jk} = \{\phi_j, \phi_k\}$$

2nd class 에서는 M_{jk}를 invert 할 수 있다.

u_k를 구할 수 있다.

$$u_k = [M^{-1}]_{kj} \{\phi_j, \mathcal{H}\}$$

$$\dot{x} = \{x, \mathcal{H}\} + \sum_k u_k \{x, \phi_k\}$$
$$= \{x, \mathcal{H}\} + \sum_k [M^{-1}]_{kj} \{\phi_j, \mathcal{H}\} \{x, \phi_k\}$$

~~디락 괄호는 $\{\ \}_D$ 라고 쓰고, 푸아송 괄호는 ${}_p\{\ \}$ 라고 쓰겠다.~~

~~디락 괄호의 정의는 이거다.~~

$\cancel{\{f, g\}_D = {}_p\{f, g\} + \sum_k {}_p\{}$

디락 괄호는 $[\ ]_D$ 라고 쓰겠다.

디락 괄호의 정의는 이렇다.

$$[f, g]_D = \{f, g\} + \sum_k \{f, \phi_k\} [M^{-1}]_{kj} \{\phi_j, g\}$$

$\dot{x} = [x, H]_D$ 이러면 그냥 해밀토니안으로 시간 진화 계산 가능.

아까 본 예제에서는 $M_{ij} = \frac{qB}{c}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{qB}{c}\varepsilon_{ij}$ 레비치비타.

$[x, y]_D = -\frac{c}{qB}$ $[x, p_x]_D = \frac{1}{2}$ $[p_x, p_y] = -\frac{qB}{4c}$

디락 괄호는 constraint를 풀지 않아도 된다. 그래서 진짜 degree of freedom에 대해 풀 수 있다.

디락 괄호를 Lie bracket으로 바꾸기만 하면 그게 양자화다.

$$\begin{cases} \dot{x} = [x, \mathcal{H}]_D \\ \dot{y} = [y, \mathcal{H}]_D \\ [x, y]_D = -\dfrac{c}{qB} \end{cases} \xrightarrow[\text{세계로.}]{\text{양자}} \begin{cases} i\hbar \dot{x} = [\hat{x}, \hat{H}] \\ i\hbar \dot{y} = [\hat{y}, \hat{H}] \\ \underline{[x, y] = -\dfrac{c}{qB}} \end{cases}$$

이게 왜 양자화인가?

왜 여긴 $i\hbar$가 안붙나?