2nd class constraint system 에서는 디락괄호로 양자화가 가능했다.

질문) 그럼 1st class 에서는 양자화가 힘든가?

질문) 이전에는 푸아송괄호를 바로 Lie bracket 으로 바꾸는 게 양자화라고 들었는데...

오늘은 phase space 의 특성을 이야기하자

$\{q_i\}$ 와 $\{p_i\}$ 가 직교한다는게 무슨의미인지, 나중에 논의하자.

해밀턴 역학에서는 $\{p_i\}$ 와 $\{q_i\}$ 가 phase space 를 이룬다.

오늘 수업은 리우빌 정리를 다룬다.

time evolution 이 해밀토니안으로 주어지면, phase space 에서 2N 차원의 부피 dV 를 지정하여 (이것은 여러 상태들의 집합이다. 각각상태는 $(\{q_i\}, \{p_i\})$ 의 벡터로 나타낼수 있다) 이 부피속에 있던 상태들이 시간이 지난 뒤 phase space 의 어느 위치로 이동하는지 볼 수 있다.

이 때 부피는 보존되며, 압축할 수 없다.

증명 $\longrightarrow$ $dV|_t = dq_1 \cdots dq_N \, dp_1 \cdots dp_N \,|_t$.

시간이 dt 만큼 지난 시점, 좌표계를 변환한다.

$q_i \longrightarrow \tilde{q}_i$, $\quad p_i \longrightarrow \tilde{p}_i$

$$\tilde{q}_i = q_i + \dot{q}_i dt = q_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dt \quad , \quad \tilde{p}_i = p_i + \dot{p}_i dt = p_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dt.$$

$$d\tilde{V} = d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_N \, d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_N = (\det J)\, dq_1 \cdots dq_N \, dp_1 \cdots dp_N = (\det J)\, dV$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_N} & \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_N} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial \tilde{q}_N}{\partial q_1} & & & & & \\ \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_1} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial \tilde{p}_N}{\partial q_N} & \cdots & \frac{\partial \tilde{p}_N}{\partial q_N} & \frac{\partial \tilde{p}_N}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{p}_N}{\partial p_N} \end{pmatrix}$$

$\det J = 1$ 이 나온다고 한다.

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(q_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dt\right) = \delta_{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} dt$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_i} dt$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial q_i} dt \qquad \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_i} dt.$$

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} dt & \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_i} dt \\ -\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial q_i} dt & \delta_{ij} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_i} dt \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_i} \\ -\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial q_i} & -\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_i} \end{pmatrix} dt.$$

$$e^{\ln \det(\mathbb{I} + dt\,\mathbb{M})} = e^{\mathrm{Tr} \ln(\mathbb{I} + dt\,\mathbb{M})} \simeq \mathbb{I} + dt\,\mathrm{Tr}\mathbb{M} \simeq 1 + O(dt^2)$$

이로서 $d\tilde{V} \simeq dV$ 가 증명되었다. 질문) determinant 구하는 동안 어떤 수학적 trick을 사용한 걸까?

$\rho(q, p, t)$ 가 phase space density 일 때,

$\int \rho(q_i, p_i, t)\, dq_i\, dp_i\, dt = N.$ ρ를 온 phase space에서 적분하면 입자 수 N이 나온다.

해밀턴 방정식을 이용하여 $\rho(\{q_i, p_i\}, t)$의 time evolution을 계산하자.

총 입자 수는 유지되어야 하므로.

$$\frac{d}{dt}\int \rho(\{q_i, p_i\}, t)\, dV = 0. \longrightarrow \frac{d}{dt}\rho = 0.$$

$$\frac{d}{dt}\rho = \dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$= \{\rho, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

$\therefore \dfrac{\partial}{\partial t}\rho = -\{\rho, \mathcal{H}\}$ 이게 바로 Liouville equation 이다.

보충 보통 아무 변수 x에 대해 $\dot{x} = \{x, \mathcal{H}\}$ 가 성립하는 것과 식의 형태가 다르다.

일부 변수를 적분해 보면 course grained information을 얻을 수 있다.

$$f(q_1, p_1, t) = \int dq_2 \cdots dq_N \, dp_2 \cdots dp_N \, \rho(\{q_i, p_i\}, t).$$

그러나 이건 f에 대해 식을 푸는 것은 어렵다.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) - \rho\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) + \nabla \cdot J = 0 \right)$$

↳ 위 식을 왜 언급한 건지 모르겠고, 제대로 받아 적은 게 맞는지도 모르겠다.

Stationary state는 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 쉽게 구할 수 있다.

$\{\rho, \mathcal{H}\} = 0$ 이므로, ρ가 온통 $\mathcal{H}$에 대한 함수가 된다. 증명도 쉽다.

$\rho(\mathcal{H}(q_i, p_i))$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{H}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{H}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0.$$

내 생각) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 는 아마 stationary condition을 의미

여기에 equilibrium 조건을 넣으면 $\rho = \rho_0 e^{-\beta \mathcal{H}}$ 가 나올 거다.

Poincare recurrence theorem.

phase space 에서 initial state 역할을 하는 점 $P_0 = \{q_i, p_i\}$ 로 생각

그것의 이웃에 대해, D_0 라 치자. $P_0 \in D_0$.

유한 시간 이내에, D_0 내부 임의의 한 점은 다시 D로 돌아온다.

이것이 성립할 조건은 전체 phase space가 유한할 것,

즉 전체 에너지가 보존되어야 한다는 조건이 필요.

성립하는 이유는 해밀턴 역학이 time-reversal 하기 때문이다.

이것은 열역학 2법칙을 위반하는 것처럼 보이나, 실제로는 아니란 것을

2학기에 배울 것이다.

이제 부터 해밀톤 방정식을 푸는 방법을 논의할 것이다.
Canonical transformation 에 대해 알아보자.

한 상태 $\mathbb{X} = \{q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots p_N\}^T = \{\vec{q}, \vec{p}\}^T$

$\vec{q} = \{q_1 \cdots, q_N\}$ $\vec{p} = \{p_1, \cdots, p_N\}$

이라고 적고,

$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}\right] = \left\{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_N}\right\}^t$ 의 N-component column vector

$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}\right] = \left\{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_N}\right\}^t$ 의 N-component column vector

matrix $\mathbb{J}$ 가 2N-by-2N matrix 인데,

$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ 꼴로 이루어져 있고, 각 4개의 block은 N by N matrix

그럼 해밀턴 방정식은 이렇게 matrix 꼴로 나타낼 수 있다.

$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{X}}$, $\begin{pmatrix} \dot{\vec{q}} \\ \dot{\vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{pmatrix}$

어떤 transform 이 여전히 이 식을 만족할까.

$q_i \longrightarrow Q_i(\{q_i, p_i\})$

$p_i \longrightarrow P_i(\{q_i, p_i\})$

이런 transform에 의한 matrix 를 M 이라 두자.

M은 아마 Jacobian matrix?

$[M]_{lk} =$

만약 $M \mathbb{J} M^T = \mathbb{J}$ 를 성립하면,

이걸 symplectic transform 이라 부른다.