이어서 canonical transform에 대한 내용이다.

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{x}_\alpha = \mathbb{J}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\beta}$$

이게 운동방정식 이었다.

$$\dot{y}_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\beta}{\partial t} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\mathbb{J}_{\beta\gamma}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\gamma} = \boxed{\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\mathbb{J}_{\beta\gamma}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\gamma}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_\lambda}$$

박스친 부분이 y좌표계에서 해밀톤 방정식의 $\mathbb{J}$ 역할을 할 것이다. Jacobian matrix $M_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$ 일때

새로운 $\mathbb{J}$인 $\mathbb{J}'$은,

$$\mathbb{J}'_{\alpha\lambda} = M_{\alpha\beta}\underline{\mathbb{J}_{\beta\gamma}M_{\lambda\gamma}} = M_{\alpha\beta}\mathbb{J}_{\beta\gamma}[M^T]_{\gamma\lambda}, \quad [M^T]_{\gamma\lambda} = \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\gamma}$$

index summation 순서가 거꾸로!, transpose.

이때, $\mathbb{J}'_{\alpha\lambda} = \mathbb{J}_{\alpha\lambda}$ 를 만족하면, 즉 $\mathbb{J} = \mathbb{J}' = M\mathbb{J}M^T$ 라면,
우리는 $x \to y$ transformation을 canonical transform이라고 부른다.
canonical transform은 곧 sympletic transform 이다.

$\mathbb{J}' = \mathbb{J}$는 곧 푸아송괄호의 기본 성질이 유지됨을 의미한다. 증명해 보겠다.
$q \to Q$, $p \to P$로 변환해도 아래 푸아송괄호 연산 결과가 유지된다는 것이다.

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \qquad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}.$$

놀랍게도, $\mathbb{J}$ matrix를 이용해 푸아송 괄호 연산을 쉽게 나타낼 수 있다.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbb{J}_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

오호, 당연하군,
$\mathbb{J}$가 약간 metric 같은 느낌.

$i \le N$
$x_i = q_i$
$i > N$
$x_i = p_{i-N}$.

이때, x_i나 x_j는 $q_1 \cdots q_N, p_1 \cdots p_N$ 모두 될 수 있다. $\mathbb{J}_{ij}$는 정직하게 $2N \times 2N$ matrix $\mathbb{J}$의 i번째 행 j번째 열 요소를 나타내는 것이다.

자코비안을 이용해, $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y_\beta}M_{\beta\alpha}$ 를 이용해 $\{f, g\}$를 새로운 좌표계에서 계산하자.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial y_k}M_{ki}\mathbb{J}_{ij}M_{\lambda j}\frac{\partial g}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial f}{\partial y_k}M_{ki}\mathbb{J}_{ij}[M^T]_{j\lambda}\frac{\partial g}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial f}{\partial y_k}\mathbb{J}'_{k\lambda}\frac{\partial g}{\partial y_\lambda}$$

앞서 보았듯, $\mathbb{J} = \mathbb{J}'$이기 때문에 x좌표계로 푸아송괄호를 푸는 것과 y좌표계로 그리는 것은 같다. $\mathbb{J}'$ 내부가 어떻게 생겼는지 직접 계산해 보자.

$\mathbb{J}$와 M은 $2N \times 2N$ matrix라서 너무 크니까, 그 중 일부만 블록으로 뽑아보자.

$$\hat{M}_{ki} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_k}{\partial q_i} & \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \end{pmatrix}$$

라고 정의한다. $\{Q, P\}$좌표계에서 k번째 Q와 P만 보고, $\{q, p\}$좌표계에서 i번째 q와 p만 보겠다는 이야기.

$$(\hat{M}^T)_{jl} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} & \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} & \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

$\hat{M}_{ki}$ 자체는 2×2 matrix 이다.

사실 $\mathbb{J}$는 q와 p들의 푸아송 괄호 결과값을 미리 저장해둔 행렬이었다.

$$x_\alpha = \begin{cases} \text{if } \alpha \le N, & q_\alpha. \\ \text{if } \alpha > N, & p_{\alpha-N}. \end{cases}$$

$$\cancel{\mathbb{J}_{\alpha\beta} = \{x_\alpha, x_\beta\}} \qquad \mathbb{J}_{\alpha\beta} = \{x_\alpha, x_\beta\} = \begin{cases} \alpha \le N, \beta \le N & \{q_\alpha, q_\beta\} = 0 \\ \alpha > N, \beta \le N & \{p_{\alpha-N}, q_\beta\} = -\delta_{\alpha-N,\beta} \\ \alpha \le N, \beta > N & \{q_\alpha, p_{\beta-N}\} = \delta_{\alpha,\beta-N} \\ \alpha > N\ \beta > N & \{p_{\alpha-N}, p_{\beta-N}\} = 0. \end{cases}$$

결과적으로,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \overset{n\times n}{0} & \overset{n\times n}{\mathbb{I}} \\ \overset{n\times n}{-\mathbb{I}} & \overset{n\times n}{0}. \end{pmatrix}$$

4개의 블록으로 쪼갤 수 있게 된 것이다.

아까 보았던 해밀턴 방정식의 행렬 표현도 사실 chainrule의 결과였다.

$$\dot{x}_\alpha = \{x_\alpha, \mathcal{H}\} = \mathbb{J}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\beta} = \{x_\alpha, x_\beta\}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\beta}$$

$$\{x_\alpha, \mathcal{H}\} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial q_i}\right)\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\beta} = \{x_\alpha, x_\beta\}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\beta}$$

$\mathbb{J}$도 블록으로 쪼갤 수 있다. 오로지 q_i와 p_j의 푸아송 괄호 관계만 본다면,

$\hat{\mathbb{J}}_{ij}$는 2×2 matrix,

$$\hat{\mathbb{J}}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{q_i, q_j\} & \{q_i, p_j\} \\ \{p_i, q_j\} & \{p_i, p_j\} \end{pmatrix}.$$

이제 $\mathbb{J}' = M\mathbb{J}M$을 계산해 보자.

$$\hat{\mathbb{J}}'_{kl} = \hat{M}_{ki}\,\hat{\mathbb{J}}_{ij}\,(\hat{M}^T)_{jl} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_k}{\partial q_i} & \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} & \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} & \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_k}{\partial q_i} & \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} & \frac{\partial P_l}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial Q_l}{\partial q_i} & -\frac{\partial P_l}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{Q_k, Q_l\} & \{Q_k, P_l\} \\ \{P_k, Q_l\} & \{P_k, P_l\} \end{pmatrix}$$

$\hat{\mathbb{J}}'_{kl} = \hat{\mathbb{J}}$ 이란 말은, 푸아송 괄호의 성질이 유지되는 것과 동치이다.

Infinitesimal canonical transformation.

$$Q_i = q_i + \alpha F_i(q_j, p_j)$$
$$P_i = p_i + \alpha E_i(q_j, p_j).$$ $\alpha \to 0$. α는 아주 작은 값.

이 transform을 canonical transform으로 만들어주는 F_i와 E_i의 조건은 뭘까?

$$\hat{M}_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial F_i}{\partial q_j} & \alpha \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \\ \alpha \frac{\partial E_i}{\partial q_j} & \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial E_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$ 여기에 $MJM^T = J$ 을 대입.

$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_i}{\partial p_j}$ 여야 한다는 조건이 나온다 이는 어떤함수 G에 대해,

$F = \frac{\partial G}{\partial p_j}$, $E = -\frac{\partial G}{\partial q_j}$ 이어야 함을 의미한다. 코시-리만 조건과 닮았다.

우리는 G를 generating function 이라고 부르고,

$\cancel{\frac{dq}{d\alpha}}$ $\frac{dQ_i}{\partial \alpha} = F_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}$, $\frac{dP_i}{\partial \alpha} = E_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$ 이다.

$$\frac{dQ_i}{\partial \alpha} = \{q_i, G\} \qquad \frac{dP_i}{\partial \alpha} = \{P_i, G\}$$
$$\delta q_i = \alpha\{q_i, G\} \qquad \delta p_i = \alpha\{p_i, G\}$$

α가 t라면, G는 H일 거이다. H가 t에 대한 generator 니까.

G는 사실 라그랑지안에서 total differential term 이다.
자세한 내용은 다음 시간에 다뤄보자.