week 5 AM-3
①

Generating function.

Canonical transform에 쓰이는 generating function은 변환 전후 좌표계의 관계를 나타낸다. $q_i \longrightarrow Q_i$, $p_i \longrightarrow P_i$, $\mathcal{H}(q_i, p_i) \longrightarrow K(Q_i, P_i)$ 이렇게 canonical transform이 된다 치자.

generating function F는 q_i, Q_i, p_i, P_i, t 에 대한 함수 여야 할 것 같지만, q_i와 p_i, Q_i와 P_i는 conjugate 관계이기 때문에, F는 q와 p, 둘 중 하나, 그리고 Q와 P, 둘 중 하나를 골라 변수로 가진다.

우리는 라그랑지안에 시간에 대한 total derivative term이 들어가도 equation of motion이 달라지지 않는다는 것을 안다. 따라서 변환 전후 라그랑지안 $L(q, \dot{q}, t)$ 와 $L'(Q, P, t)$는 total derivative 만큼 차이 나도 괜찮다.

이 차이가 바로 generating function의 시간 미분이다.

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q_i, p_i)$$

$$\mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) = P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i) + \frac{d}{dt}F.$$

$$\cancel{P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i)}$$

예를 들어, F_1가 q와 Q의 함수라고 치자.

$$\frac{d}{dt}F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

이를 대입하고, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ 이라면,

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = P_i \dot{Q} - K + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \mathcal{H} = \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

따라서, $\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$, $K = \mathcal{H} - \frac{\partial F_1}{\partial t}$.

역으로 생각하면, 이제 p_i는 q_i와 Q_i에 대한 함수이고, P_i 또한 q_i와 Q_i에 대한 함수이다.

이 generating function이 canonical transform을 나타낸다면, 푸아송 괄호의 성질을 유지해야 할 것이다.

$$\{Q, P\} = \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p \left.\frac{\partial P}{\partial p}\right|_q - \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_p$$

P는 q와 Q에 대한 함수, p도 q와 Q에 대한 함수임을 유념.

$$\left.\frac{\partial P}{\partial p}\right|_q = \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q. \qquad \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_p = \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q + \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p$$

$\frac{\partial P}{\partial p}$를 바로 계산할 수 없다. $P(q, Q)$와 $p(q, Q)$ 이므로, chain rule을 이용해 편미분을 계산해야 한다.

Week 3 AM-3

②

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_p \frac{\partial P}{\partial Q}\Big|_q \frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q - \frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial q}\Big|_Q - \frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial Q}\Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_p$$

$$= -\frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial q}\Big|_Q = +\frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial F_1}{\partial Q\,\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial p}{\partial Q}\Big|_q = 1$$

정말 복잡하지만 놀라운 관계다. 보통 많이 쓰는 generating function은 $F_2(q,P)$ 이다. 이 경우에도 정리해 보면,

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$p_i\dot{q}_i - \mathcal{H} = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt}$$

우리는 $\dot{Q}_i$ 대신 $\dot{P}_i$ 가 필요해.

$$P_i\dot{Q}_i = \frac{d}{dt}(P_iQ_i) - Q_i\dot{P}_i$$

$$\left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \mathcal{H} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i\right)\dot{P}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt}(P_iQ_i)$$

$$\therefore \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i, \quad K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

이제 P와 Q는 q와 P에 대한 함수.

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_p \frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q - \frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial q}\Big|_p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_p = \frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_P + \frac{\partial Q}{\partial P}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial q}\Big|_p,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\Big|_q = \frac{\partial Q}{\partial P}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q$$

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_P \frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q + \frac{\partial Q}{\partial P}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial q}\Big|_p \frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q - \frac{\partial Q}{\partial P}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q \frac{\partial P}{\partial q}\Big|_p$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial q}\Big|_P \frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q\,\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}\Big|_q = \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} = 1.$$

이외, p와 Q를 변수로 생각한 $F_3(p,Q)$,
p와 P를 변수로 생각한 $F_4(p,P)$ 를 생각할 수도 있다.
같은 canonical transform을 나타내는 F_1, F_2, F_3, F_4 사이는 르장드르 변환의 관계 이다.

week 5 AM-3

③

	q	p
Q	$F_1(q,Q)$ $\frac{\partial F_1}{\partial q_i}=p_i \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}=-P_i\right)$	$F_3(p,Q)$ $\frac{\partial F_3}{\partial p_i}=-q_i \quad \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}=-P_i\right)$
P	$F_2(q,P)$ $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}=p_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i}=Q_i$	$F_4(p,P)$ $\frac{\partial F_4}{\partial p_i}=-q_i \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_i}=Q_i$

르장드르 변환 관계.

$$\boxed{\begin{tikzcd}
F_1(q,Q) \arrow[r, "F_3=F_1-q\frac{\partial F_1}{\partial q}"] \arrow[d, "F_2=F_1-Q\frac{\partial F_1}{\partial Q}"'] & F_3(p,Q) \arrow[d, "F_4=F_3-Q\frac{\partial F_3}{\partial Q}"] \\
F_2(q,P) \arrow[r, "F_4=F_2-q\frac{\partial F_2}{\partial q}"'] & F_4(p,P)
\end{tikzcd}}$$

$$F_2=F_1-Q\frac{\partial F_1}{\partial Q}=F_1+QP \longrightarrow dF_2=dF_1+d(QP)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q}dq+\frac{\partial F_2}{\partial P}dP=\frac{\partial F_1}{\partial q}dq+\frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ+P\,dQ+Q\,dP$$

$$\therefore \frac{\partial F_2}{\partial q}=\frac{\partial F_1}{\partial q},\quad \frac{\partial F_1}{\partial Q}=-P,\quad \frac{\partial F_2}{\partial P}=Q.$$

$$F_3=F_1-q\frac{\partial F_1}{\partial q}=F_1-qp \longrightarrow dF_3=dF_1-d(qp)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial p}dp+\frac{\partial F_3}{\partial Q}dQ=\frac{\partial F_1}{\partial q}dq+\frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ-p\,dq-q\,dp$$

$$\therefore \frac{\partial F_1}{\partial q}=p,\quad \frac{\partial F_3}{\partial Q}=\frac{\partial F_1}{\partial Q},\quad \frac{\partial F_3}{\partial p}=-q$$

F_2 와 F_4 의 변환, F_3와 F_4의 변환도 똑같이 보일 수 있다

Generator 와 generating function의 관계

$$F_2(q, P, t) = q_i P_i + \varepsilon G(q, P, t)$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \qquad \delta p_j = P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \qquad \delta q_j = Q_j - q_j = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}$$

G가 각운동량인 경우, generating function은 무엇인가?

canonical cordinate로 해밀톤 방정식 푸는 법

$\dot{Q}_i = 0$, $\dot{P}_i = 0$ 를 만족하는 변환를 찾으면 된다!

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial K(Q,P)}{\partial P} = 0 \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial K(Q,P)}{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

즉, $K = 0$ 이거나 상수 여야 한다.

F_2를 사용하는 경우, $K(Q, P, t) = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0.$

$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ 대입, $\mathcal{H}(q, \frac{\partial F_2}{q}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.$

이게 바로 해밀턴-자코비 방정식이다!

베셀 방정식은 원기둥 좌표계의 eigen function, 이건 원기둥 좌표의 대칭성과 캐시미어에 의해 결정된다?