미분기하, sympletic geometry 를 시작한다.
우리는 얼마 안 가 맥스웰 방정식을 differential form 으로 나타내는 법을 알게 될 것이다.
교수님이 ① 스티너라는 걸 언급했다. 이게 뭐지?

⟨ Vector field란 뭔가? ⟩

$\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{U}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$

tangent space of $\mathcal{U}$: $T_x\mathcal{U} := \{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$

x는 point를 나타내고, ξ는 velocity vector를 나타내며,
(x, ξ)는 tangent vector를 나타낸다.
이것은 linear structure를 가진다.

$\lambda_1 (x, \xi) + \lambda_2 (x, \eta) = (x, \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta)$

γ 는 시간이라는 매개변수를 manifold 위의 한 점으로 mapping 하는 함수, 운동 그 자체.

$$\gamma : (t_0, t_1) \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \gamma(t)$$

γ로 tangent vector를 정의할 수 있다.

$$\left(x = \gamma(t),\ \xi = \frac{d\gamma(t)}{dt} \right) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{U}$$

V가 $\mathcal{U}$ 위의 vector field 일 때,

$$V : \mathcal{U} \longrightarrow T_x\mathcal{U}$$
$$x \longmapsto V(x) = (x, \xi(x))$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_x = (x, (1, 0, 0, \cdots, 0))$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = (x, (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \cdots, \delta_{ni}))$$

i 방향으로만 속도가 1인 ξ

모든 $x \in U$ 에 대해, $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}$ 들을 $T_x U$ 의 basis 를 이룬다.

모든 벡터장은 이렇게 나타낼 수 있다.

아인슈타인 summation convension.

$$V = V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

앞으로 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 를 가끔 ∂_i 라고 표기하자.

상미방을 벡터장과 연관지어 보자.

~~상미방~~ 운동방정식을 따르는 궤적, 미방의 해는 곧, 벡터장의 흐름을 따르는 입자이다.

<integral curve>

Let $I \subset \mathbb{R}$ be the open interval

$$\gamma : I \to U \subset \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = V(\gamma(t))$$

for each $t \in I$.

이런 곡선을 integral curve of the vectorfield V on U 라고 부른다.

$$\gamma_i(t) = t(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \cdots, \delta_{in})$$

이 $\gamma_i(t)$는 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 를 위한 integral curve 이다.

AM 9th week -2. 초고.

Theorem V가 local domain $\mathcal{U}$에서 smooth vectorfield 라면,
for the each point $x_0 \in \mathcal{U}$, there exist an integral curve, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}$, such that $\gamma_0 = x_0$
any two such integral curves meeting at x_0, are equal on the cross section of their domain.

이것은 아마 ODE solution의 existance 와 uniqueness 에 의한 성질이다.

$\frac{d}{dt}\gamma(t) = V(\gamma(t))$ → 이게 ODE 이다.

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$$
$$V(x) = V^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + V^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}$$
$$\frac{\partial \gamma^1(t)}{\partial t} = V^1(\gamma(t)), \quad \frac{\partial \gamma^2(t)}{\partial t} = V^2(\gamma(t)) \cdots \frac{\partial \gamma^n}{\partial t} = V^n(\gamma(t))$$

예시) $\mathcal{H}(p, q)$가 phase space 에서 해밀토니안을 나타낸다 치자.
해밀톤 방정식은 integral curve를 만들어 낸다.
이를 결정하는 vector field는,

$$\mathbb{V}(q, p) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$ → $\dot{q}^i$가 $\frac{\partial \gamma^i}{\partial t}$의 역할을 하는 거다

$$= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

벡터장 그 자체는 $\mathcal{U}$위에 있는 함수에 대한 미분 연산자로 작용한다.

$$\mathbb{V}(x) = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad V(f)(x) = V^i(x)\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x$$

이 연산자는 라이프니츠 규칙을 만족. $V(fg) = fV(g) + V(f)g$
역학의 모든 특성은 위상 공간의 기하가 결정한다.

미분 연산자를 이해하는 기하학적 방법

Let $f \in C^\infty$ $x_0 \in \mathcal{U}$, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}$, $\gamma(0) = x_0$
then, $V(f)(x_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} f(\gamma(t))$ 이때, $V(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$

RHS : $\frac{d}{dt} f(r(t)) = \sum_i \frac{dr^i(t)}{dt} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{r(t)} = \sum_i V^i_{(r(t))} \frac{\partial f}{\partial x^i}(r(t))$

그냥 chain rule 인 것이다.
f 라는 함수가 integral curve를 따를 때 얼마나 바뀌나?

Vect ($\mathcal{U}$) 는 $\mathcal{U}$ 위에 있는 smooth vector field의 공간.
$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $W = W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$
< Lie bracket >

$$[V, W] : (C^\infty(\mathcal{U}), C^\infty(\mathcal{U})) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$$

$$[V, W] f = V(W(f)) - W(V(f))$$

양자에서 commutator랑 기능이 비슷.

① $[V, W] C = 0$ for any constant C.
② $[V, W] fg = V(W(fg)) - W(V(fg))$
$= V(fW(g) + gW(f)) - W(fV(g) + gV(f))$
$= fV(W(g)) + V(f)W(g) + V(g)W(f) + gV(W(f))$
$- W(f)V(g) - fW(V(g)) - W(g)V(f) - gW(V(f))$

$$= f[V, W]g + g[V, W]f$$

$$[V, W] f = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(W^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - W^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$
$$= \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$[V, W] = \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Lie bracket 성질

① bilinear 하다 ② skew symmetry $[W, V] = -[V, W]$

③ Jacobi identity → 이게 핵심, 연산의 consistancy를 만든다.

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

$\mathcal{V} = e^{iV\cdot\varepsilon_v}$ 라고 두고, $(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})\mathcal{T} = \mathcal{V}(\mathcal{W}\mathcal{T})$ 이렇게

교환 법칙이 성립한다고 두면, generator V, W, T에 대해

$[V, [W, T]] + [W, [T, V]] + [T, [V, W]] = 0$ 가

성립함을 볼 수 있다.

→ 직접 증명 나중에 해보기!

⟨Tangent map, push forward⟩

Let $U_1 \in \mathbb{R}^n$, $U_2 \in \mathbb{R}^m$ be two opensubsets

둘의 coordinate를 이렇게 나타내자.

$U_1 : x = (x^1, \cdots, x^n)$ $U_2 : y = (y^1, \cdots, y^n)$

φ 라는 smooth map은 U_1 에서 U_2로 점을 mapping.

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$
$$x \longmapsto y = \varphi(x)$$
$$(y^1 = \varphi^1(x),\ y^2 = \varphi^2(x),\ \cdots,\ y^n = \varphi^n(x))$$
$$\therefore y^i = \varphi^i(x)$$

이를 이용해 tangent vector를 mapping 하는 φ_*를 정의.

$$\varphi_* : T_x U_1 \rightarrow T_{\varphi(x)} U_2$$

$T_x U_1$의 basis를 φ_*가 어떻게 mapping 하냐면,

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

따라서 $T_x U_1$에 속한 임의의 벡터 $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 에 대해서,

$$\varphi_*\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j}^{m}\sum_{i}^{n} \xi^i \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

U_1 위의 커브를 하나 생각하자.

$\gamma : I \to U_1 \qquad \gamma(0) = x \quad , \qquad \gamma'(0) = \xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

커브를 U_2 위로 옮기는 건 φ가 한다.

$\varphi \cdot \gamma : I \to U_2 \qquad \varphi(\gamma(0)) = \varphi(x)$

이것의 $t=0$ 에서 tangent vector는

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^i(\gamma(t))} \frac{\partial}{\partial y^i} = \xi^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^i(\gamma(t)) = \left(\frac{d\gamma^j(t)}{dt}\right) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} = \xi^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}$$

$$\therefore \quad (\varphi \cdot \gamma)'(0) = \varphi_*(\gamma'(0)) = \varphi_*(\xi)$$

φ_*는 커브의 속도를 U_1 위에서 U_2 위로 옮겨준다.

Proposition) pushing forward 도 합성함수처럼 연산할 수 있다.

Let $\varphi : U_1 \to U_2$, $\phi : U_2 \to U_3$
then $(\phi \circ \varphi)_* = \phi_* \circ \varphi_*$

$$\begin{tikzcd}
T_x U_1 \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "(\phi\cdot\varphi)_*"'] & T_{\varphi(x)} U_2 \arrow[d, "\phi_*"] \\
 & T_{\phi(\varphi(x))} U_3
\end{tikzcd}$$