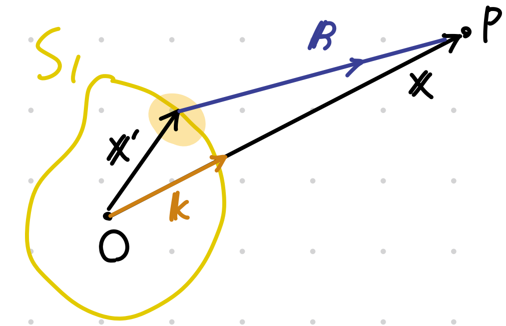
ED 11th week-2



Chapter 10.9 Diffraction by cirular aparture

소스의 위치: $\mathbf{x}'$, 관찰자 위치: $\mathbf{x}$, 소스로부터 관찰자 위치: $\mathbf{R}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$

회절파의 파수 벡터: $\mathbf{k}$, 방향이 $\mathbf{x}$와 같음.

관찰방향의 unit vector: $\hat{n}=\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}=\frac{\mathbf{x}}{x}=\frac{\mathbf{x}}{r}$

소스 크기에 비해 관찰자가 멀리 있을 때 근사, 교과서 표현으로는 $r \gg d$

$$kR = k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = k\left[x^2+x'^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'\right]^{\frac{1}{2}} = kx\left[1+\left(\frac{x'}{x}\right)^2-2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= kx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x}\right)^2-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{x^2}+\cdots\right] = kx - k\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{x}+\frac{k}{2x}\left(x'^2+\cdots\right)$$

$$= kr - k\hat{n}\cdot\mathbf{x}'+\frac{k}{2r}\left(r'^2+\cdots\right)$$

Fraunhoffer Diffraction: $kR = kr - k\hat{n}\cdot\mathbf{x}'$

이걸 (Jackson (10.79) 에 적용하면

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int_{S_1} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\left[\hat{n}\cdot\nabla'\psi(\mathbf{x}')+i\mathbf{k}\cdot\hat{n}\,\psi(\mathbf{x}')\right]da' \qquad \text{(Jackson 10.108)}$$

질문: Vector diffraction 이랑 scalar diffraction의 차이가 뭐지?

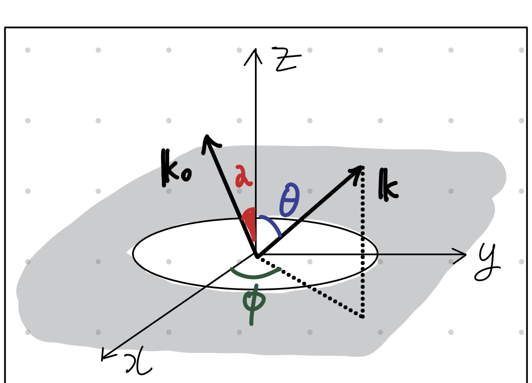
Scalar diffraction theory for circular aparture

구멍에서 입사파 조건, 입사파의 파수가 $\mathbf{k}_0$ 일때,

$$\psi(\mathbf{x}) = E_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}, \quad \nabla\psi(\mathbf{x}) = i\mathbf{k}_0\psi(\mathbf{x}), \quad \nabla'\psi(\mathbf{x}') = i\mathbf{k}_0\psi(\mathbf{x}')$$

(Jackson 10.108) 에서 피적분항 중 [] 내부 항에 해당되는 부분은 아래와 같다.

$$(i\mathbf{k}_0+i\mathbf{k})\cdot\hat{n}\,\psi(\mathbf{x}') = i(\mathbf{k}_0+\mathbf{k})\cdot\hat{n}\,E_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}'}$$



구멍이 x-y plane 에 원점을 중심, a 반지름으로 뚫려있다.

plane of incident wave를 x-z plane 으로 고정. 임의의 각도 α 에 대해

입사파의 wave number vector는 $\mathbf{k}_0 = k(\hat{x}\sin\alpha+\hat{z}\cos\alpha)$

대신 산란파에 많은 자유도를 준다. 임의각 ϕ, θ 에 대해

$\mathbf{k} = k(\hat{x}\sin\theta\cos\phi+\hat{y}\sin\theta\sin\phi+\hat{z}\cos\theta)$

관찰 방향의 unit vector $\hat{n}$은 곧 $\mathbf{k}$의 unit vector

$\hat{n} = \hat{k} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi+\hat{y}\sin\theta\sin\phi+\hat{z}\cos\theta$

$i(\mathbf{k}_0+\mathbf{k})\cdot\hat{n} = ik(\cos\alpha+\cos\theta)$

소스 X'는 x-y plane 위 구멍에 포함되는 모든 점이 될 수 있다. $\mathbf{x}' = \hat{x}\,\rho\cos\beta + \hat{y}\,\rho\sin\beta$

$\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}' = k\rho\sin\alpha\cos\beta$

$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' = k\rho(\sin\theta\cos\phi\cos\beta + \sin\theta\sin\phi\sin\beta) = k\rho\sin\theta\cos(\phi-\beta)$

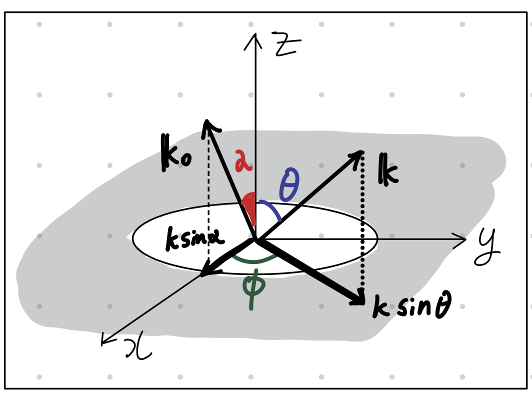
우리가 계산할 적분은

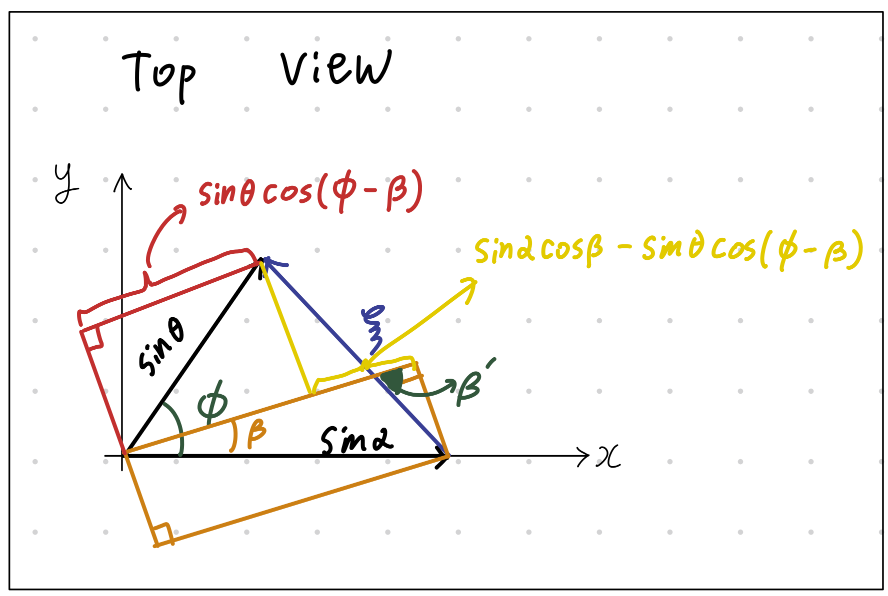
$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cdot i(\mathbf{k}_0+\mathbf{k})\cdot\hat{n}\,E_0\int_{S_1} e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'}\,da'$$

지금까지 구한 식들을 집어 넣으면,

$$\psi(\mathbf{x}) = ik\left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\right)E_0(\cos\alpha+\cos\theta)\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\beta\; e^{ik\rho[\sin\alpha\cos\beta-\sin\theta\cos(\phi-\beta)]}$$

저 적분을 어찌 푸나? 기하학적 스킬이 필요하다.





Define a new vector,

$\vec{\xi} = \hat{y}\sin\theta - \hat{x}\sin\alpha$

$|\xi| = \sin^2\theta + \sin^2\alpha - 2\sin\theta\sin\alpha\cos\phi$

그리고 그림에서 보이는 대로,

$\sin\alpha\cos\beta - \sin\theta\cos(\phi-\beta) = |\xi|\cos\beta'$

Define a new vector,

$\vec{\xi} = \hat{\theta}\sin\theta - \hat{\phi}\sin\alpha$

$\hat{\theta}$하고 $\hat{\rho}$ 직교돼야하는거 아님?

$|\xi| = \sin^2\theta + \sin^2\alpha - 2\sin\theta\sin\alpha\cos\phi$

$$\int_0^{2\pi}d\beta\; e^{-ik\rho[\sin\alpha\cos\beta-\sin\theta\cos(\phi-\beta)]} = \int_0^{2\pi}d\beta'\; e^{ik\rho|\xi|\cos\beta'} = 2\pi J_0(k\rho\xi)$$

$$\int_0^a\rho J_0(k\rho\xi)\,d\rho = \frac{1}{k\xi}J_1(ka\xi)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = -(ik)\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{\cos\alpha+\cos\theta}{2}\right)a^2E_0\frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = P_i \frac{(ka)^2}{4\pi} \cos\alpha \left(\cos^2\theta + \cos^2\phi \sin^2\theta\right) \left| \frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi} \right|^2$$

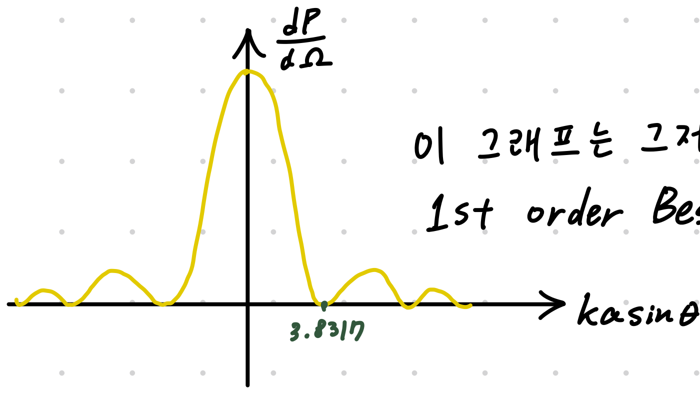
where $P_i = \left(\frac{E_0^2}{2Z_0}\right) \pi a^2 \cos\alpha$

1st order Bessel function $J_1(x)$ 에 대해, $x = 3.8317$ 일 때
처음으로 $J_1(x)$ 의 값이 0 이 된다.

따라서 $ka\xi = 3.8317$, $\xi = \frac{\lambda}{2\pi a} \cdot 3.8317$ 일 때 첫번째 어두운 회절무늬 발생

x-y plane 에 직교하는 방향으로 빛이 오면, $\alpha = 0$, $\vec{\xi} = \hat{y}\sin\theta$

$\xi = \sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi a} \cdot 3.8317$ 일 때 첫번째 어두운 회절 무늬 발생.



이 그래프는 그저
1st order Bessel function의 모양이다.

구멍이 커질수록, a가 클수록 $\sin\theta$가 작을 때 어두운 회절 무늬가 생긴다.

$\frac{dP}{d\Omega}$ 의 폭이 좁아짐을 의미한다.

반대로 구멍이 좁을 수록 회절이 많이 되어 밝은 회절 무늬의 폭이 넓어진다.

Chapter 10.11 Optical theorem

Connects the total scattering cross section of a scatterer to the imaginary part of the forward scattering amplitude

$$\sigma_t = \frac{\text{total power}}{\text{incident power}} = \frac{4\pi}{k} \, Im\left[\hat{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{f}(\mathbf{k} = \mathbf{k}_0)\right]$$

$$\begin{cases} \vec{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\vec{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{E_0} \\ \hat{\varepsilon}^* \cdot \vec{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \sim \text{forward scattering amplitude} \end{cases}$$

이게 지금 무슨 내용이지? $\vec{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ 하고 $\vec{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ 는 뭐지?