

Chapter 11

Special Theory of Relativity

전자가 얼마나 빨리 이동해야 빛이 생기나?

라는 질문에 답하기 위해, 우리는 광속에 가까운 운동을 다룰 수 있는 coordinate transform을 배워야 한다.

Particle dynamics in two different coordinate system.

우리는 일단 두 관성계에 관해서만 논의하겠다.

한 관성계가 다른 관성계에 대해 V 의 속도로 이동할 때,

Galilean transformation

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

$$v'_i = \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d}{dt}(x_i - V_i t) = v_i - V_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}}_{\delta_i^j} \frac{\partial}{\partial x'_j} + \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x_i}}_{=0} \frac{\partial}{\partial t'} = \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'_j} + \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{=1} \frac{\partial}{\partial t'} = V_j \frac{\partial}{\partial x'_j} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

이 변환에서 운동방정식은 불변하는가?

$$\begin{aligned} \text{Newton's law: } m \frac{dv'_i}{dt'} &= -\nabla'_i \sum_j V_{ij} (|x'_i - x'_j|) \\ &= -\nabla_i \sum_j V_{ij} (|x_i - x_j|) \\ &= m \frac{dv_i}{dt} \end{aligned}$$

이게 무슨 논리지?

Wave equation $\longrightarrow$ 이걸 불변이 아니어서 문제다!

$$\left(\sum_i \partial_i^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \psi = 0$$

$$\partial_i = \partial_{i'} \quad \partial_t = \partial_{t'} + V_i \partial_{i'}$$

$$\partial_t^2 = (\partial_{t'} + V_i \partial_{i'}) (\partial_{t'} + V_i \partial_{i'}) = \partial_{t'}^2 + 2 \partial_{t'} \underbrace{V \cdot \nabla'} + (V \cdot \nabla')^2$$

이거 어떻게 풀기
하는 게 맞음?

파동방정식의 형태를 무너뜨리는 추가항 $2 \partial_{t'} V \cdot \nabla' + (V \cdot \nabla')^2$ 가 생겼다.

이래서는 안된다! 맥스웰 방정식과 파동방정식을 보존하는 transformation 이 필요.

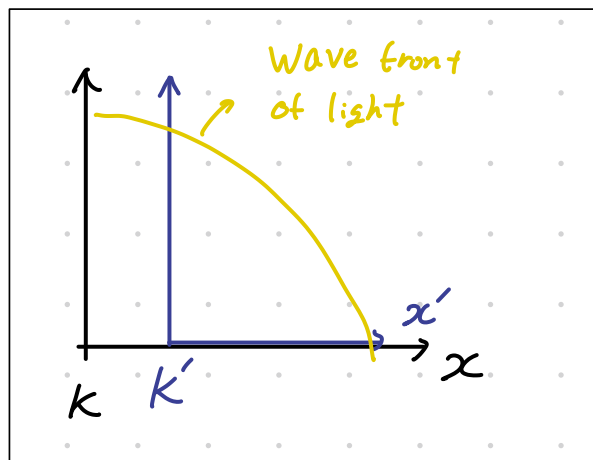
< Lorentz Transform >

이것을 만드는 두 가지 재료.

① Newton's equation of motion과 Maxwell equation이 invariant할 것.

② 광속 불변: speed of light (maximum speed of objects) is constant.

Lorentz Transformation relation



K 와 K' 라는 두 inertial frame 을 고려.

$$K: (t, x, y, z), \quad K': (t', x', y', z')$$

$t = t' = 0$ 였을 때, K 와 K' 의 원점은 같았다.

K' 는 K 에 대해, $x(x')$ direction 으로 v 의 속도로 이동 중.

$t = t' = 0$ 에서 빛을 잠깐 켜다 끈다.

K -frame 에서 빛의 경로는 $c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$

광속 불변 이므로, K' -frame 에서 빛의 경로 또한 $c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

homogeneous 하고 isotropic 한 space-time coordinate 라면 다음 등식을 만족 해야 한다.

$$0 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \lambda^2 [c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2]$$

이때, λ 는 scale factor.

K 에서 K' 로의 역변환을 고려하면, $|\lambda| = 1$ 이어야 한다. 따라서,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

위 등식을 간단하게 나타내는 방법이 있다.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = i c t \\ X_1 = x \\ X_2 = y \\ X_3 = z \end{array} \right.$$

이렇게 X_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) 을 정의 한다면,
두 좌표계에서 X 의 내적은 같다.

$$X_\alpha \cdot X_\alpha = X'_\alpha \cdot X'_\alpha$$

X' 와 X 의 변환 관계는 무엇인가? 일단 $X'_2 = X_2$, $X'_3 = X_3$ 은 받아들이고 넘어가자.

미지의 a 값을 $X_0'^2 + X_1'^2 = X_0^2 + X_1^2$ 을 통해 찾는다.

좌변을 풀면,

$$(a_{00}^2 + a_{10}^2) X_0^2 + (a_{01}^2 + a_{11}^2) X_1^2 + 2(a_{00} a_{01} + a_{10} a_{11}) X_1 X_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{00}^2 + a_{10}^2 = 1 \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$a_{00} a_{01} + a_{10} a_{11} = 0$$

한 가지 조건이 더 필요하다.

K' 좌표계의 원점을 K' 좌표계와 K 좌표계에서 나타내자.

K 에서는 등속 v 로 이동중 $x_1 = vt = \frac{v}{c} x_0$

K' 에서는 원점이니까 정지중. $x'_1 = 0$

앞으로 광속과 속도의 비를 $\beta = \frac{v}{c}$ 라고 두겠다. $x_1 = -i\beta x_0$

$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1$ 에 원점의 상황 대입,

$$0 = (a_{10} - i\beta a_{11})x_0$$

$a_{10} = i\beta a_{11}$ 이라는 추가조건을 얻었다.

$$\begin{cases} a_{00}^2 + a_{10}^2 = 1 \longrightarrow a_{00}^2 - \beta^2 a_{11}^2 = 1 \longrightarrow \underline{a_{00}^2 - i\beta a_{00}a_{01} = 1} \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 = 1 \longrightarrow \underline{a_{01}^2 - \frac{1}{i\beta} a_{00}a_{01} = 1} \\ a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} = 0 \longrightarrow a_{00}a_{01} + i\beta a_{11}^2 = 0 \\ a_{10} = i\beta a_{11} \end{cases}$$

이제 전부 풀 수 있는데... 복잡하긴 마찬가지

$$\begin{cases} a_{00}(a_{00} - i\beta a_{01}) = 1 \\ a_{01}(a_{01} - \frac{1}{i\beta} a_{00}) = 1 \end{cases}$$

연립 2차 방정식을 얻어도 해가 바로 보이지 않는다.

$a_{00} = b a_{01}$ 를 넣어 두 식을 같게 만드는 b 를 찾는다.

$$\begin{cases} a_{01}^2 b(b - i\beta) = 1 \\ a_{01}^2 (1 - \frac{b}{i\beta}) = 1 \end{cases}$$

$$b^2 - i\beta b = 1 - \frac{1}{i\beta} b$$

$$b^2 - (i\beta - \frac{1}{i\beta})b - 1 = 0$$

$$(b - i\beta)(b + \frac{1}{i\beta}) = 0$$

$$\frac{i}{\beta} a_{01} (\frac{i}{\beta} a_{01} - i\beta a_{01}) = 1$$

$$b = i\beta \text{ 를 선택하면, } a_{00}(a_{00} - i\beta a_{01}) = 1 \implies i\beta a_{01}(i\beta a_{01} - i\beta a_{01}) = 0 \stackrel{?}{=} 1$$

$$\text{모순이 발생, } b = -\frac{1}{i\beta} \text{ 을 선택, } a_{00} = \frac{i}{\beta} a_{01} \text{ 대입 } a_{00}(a_{00} - i\beta a_{01}) = 1 \implies a_{01}^2 (-\frac{1}{\beta^2} + 1) = 1$$

$$a_{01}^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta^2}} = \frac{-\beta^2}{-\beta^2 + 1}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ 라고 앞으로 쓰자 } a_{01} = i\beta\gamma$$

알아낸 $a_{01} = i\beta\gamma$ 를 $a_{00} = \frac{i}{\beta}a_{01}$, $a_{00}a_{01} + i\beta a_{11}^2 = 0$, $a_{10} = i\beta a_{11}$ 에 순서대로 넣어

나머지 값들을 알아내면, $a_{00} = -\gamma$, $a_{11} = \gamma$, $a_{10} = i\beta\gamma$

a_{11} 와 a_{10} 의 부호가 동시에 바뀌어도 수학적으로는 문제 없다. 이러면 안 될 거 같은데?

$$\begin{cases} x'_0 = -\gamma x_0 + i\beta\gamma x_1 \\ x'_1 = i\beta\gamma x_0 + \gamma x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad v \ll c \text{ 일때 갈릴레이 변환과 같은 꼴인지 확인}$$

$$\beta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1, i\beta x_0 = -vt$$

$$\text{결과는 } \begin{cases} x'_0 = -x_0 \\ x'_1 = -vt + x_1 \end{cases}$$

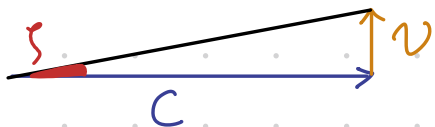
이런! 무언가 잘못되었다! $a_{01}^2 = \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}$ 에서 $a_{01} = i\beta\gamma$ 로 넘어간 게

문제였다. $a_{01} = -i\beta\gamma$, $a_{00} = \gamma$ 로 두어 $a_{00} > 0$ 을 지켜야 했다.

또 $a_{11} > 0$ 이어야 말이되므로, 진짜 답은

$$\begin{cases} a_{01} = -i\beta\gamma \\ a_{00} = \gamma \\ a_{11} = \gamma \\ a_{10} = i\beta\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} x'_0 = \gamma x_0 - i\beta\gamma x_1 \\ x'_1 = i\beta\gamma x_0 + \gamma x_1 \\ \begin{cases} t' = \gamma t - \frac{\beta}{c} \gamma x \\ x' = -v\gamma t + \gamma x \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} v \ll c \text{ limit} \\ \begin{cases} t' = t \\ x' = -vt + x \end{cases} \end{matrix}$$

이제야 정확하게 변환이 이루어졌다.

Boost : 

$$\tanh \phi = \frac{v}{c} \text{ 가 boost 의 정의다}$$

이러면 β 와 γ 의 관계를 hyperbolic function 으로 나타낼수 있다.

$$1 = \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\cosh \phi}{\sqrt{\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi}} = \cosh \phi$$

$$\begin{cases} \beta = \tanh \phi \\ \gamma = \cosh \phi \\ \gamma \beta = \sinh \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_0 = -\cosh \phi X_0 + \sinh \phi X_1 \\ X'_1 = \sinh \phi X_0 + \cosh \phi X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ct)' = (ct) \cosh \phi - x \sinh \phi \\ x' = -(ct) \sinh \phi + x \cosh \phi \end{cases}$$

hyperbolic function 이란 점에서
다른 하지만, 마치 회전 변환 처럼 생겼다.

대학원에서 배우는 개념인 four vector 를 소개한다.

Four Vectors : 로렌츠 변환을 따르는 시공간 속 벡터.

질문 : four vector 공간과 $\mathbb{R}^4$ 가 같지 않겠지?

light cone 밖에는 four vector 가 정의 안 되어야 할 것 같다.

원래 우리가 알던 3-dimension vector

$\mathbf{x} : (x, y, z), \rightarrow$ orthogonal transformation property

Four vector $A : (A_0, A_1, A_2, A_3) \rightarrow$ Lorentz transform property

notation : 앞으로 4-vector 는 볼드체로 쓰고, 3-vector 는 $\vec{A}$ 화살표 기호를 쓴다.

교과서에서는 $X_0 = ct$ 라고 정의해서 아래 변환 식을 따른다.

$$\begin{cases} X'_0 = \gamma X_0 - \beta \gamma X_1 \\ X'_1 = -\beta \gamma X_0 + \gamma X_1 \end{cases}$$

$\vec{\beta} = \frac{1}{c} \vec{v}$ 라고, 3 vector 를 정의.

4-vector A 의 일부, spacial element 한 분리해 3-vector $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$

Generalized Lorentz transform

$$\begin{cases} A'_0 = \gamma(A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \\ A'_{||} = \gamma(A_{||} - \beta A_0) \\ A'_{\perp} = A_{\perp} \end{cases}$$

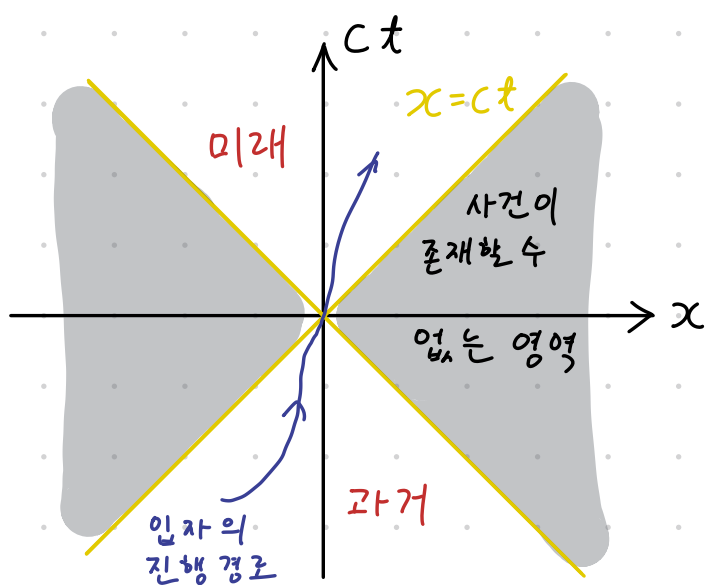
이때, $A_{||}$ 은 $\vec{v}$ 에 평행, $A_{\perp}$ 은 $\vec{v}$ 에 직교하는 성분.

질문) $A'_{||} = \gamma(A_{||} - \beta A_0)$ 에서 스칼라 β 는 $\vec{\beta}$ 의 크기겠지? 그래야 하는데?

invariance: $A_0'^2 - |\vec{A}'|^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2$

scalar product invariance: $A_0 B_0' - \vec{A}' \cdot \vec{B}' = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$

Light cone $\rightarrow$ 교수님이 교과서 보라고 하심. 이미 아는 내용이다.



두 사건 $P_1(t_1, \vec{x}_1)$ $P_2(t_2, \vec{x}_2)$

가 있을 때, 시공간에서 사건 사이 거리를

$$S_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$$

case 1) $S_{12}^2 > 0$

$$c^2(t_1 - t_2)^2 > |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$$

light cone 내부에서 일어나는 인과적일수있는 두 사건.

time like separation 이라 부른다.

case 2) $S_{12}^2 < 0$, $c^2(t_1 - t_2)^2 < |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$

인과적으로 어질수 없는, 거의 동시간에 다른 공간에서 일어나는 폭립 사건,

space like separation 이라 부른다.

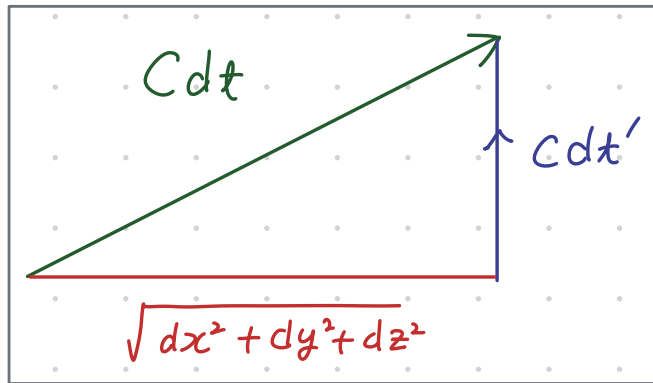
Case 3) $S_{12}^2 = 0$, $c^2 |t_1 - t_2|^2 = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$ 이걸 빛의 경로가 있는 사건.
light like separation 이라 한다.

< Proper time >

멈춘 coordinate K 에서 흐른 시간: dt

움직인 coordinate K' 에서 흐른 시간: dt' 이게 proper time 이다.

$$c^2 dt^2 = c^2 dt'^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2(t)} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

$$t' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \beta^2(t)}$$

질문) 왜 앞서 본 변환식 $t' = \gamma t - \frac{\beta}{c} \gamma x$ 과 결과가 반대처럼 보이나?

Relativistic Doppler shift

phase of wave is invariant: $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{x}'$

wave number 4-vector: $k = (k_0, \vec{k})$ k_0 가 뭐지?

Lorentz transform.

$$\begin{cases} k'_0 = \gamma(k_0 - \beta \cdot \vec{k}) \\ k'_{||} = \gamma(k_{||} - \beta k_0) \\ k'_\perp = k_\perp \end{cases}$$

$$\tan \theta' = \frac{|k'_\perp|}{k'_{||}} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)}$$

$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$

} 유도 어떻게?

θ 는 빛의 진행 방향이 v 와 이루는 각도.

4-Velocity

in k' , p moves with $\vec{u}' (u', \theta, \varphi)$

2! 어서 봐라!

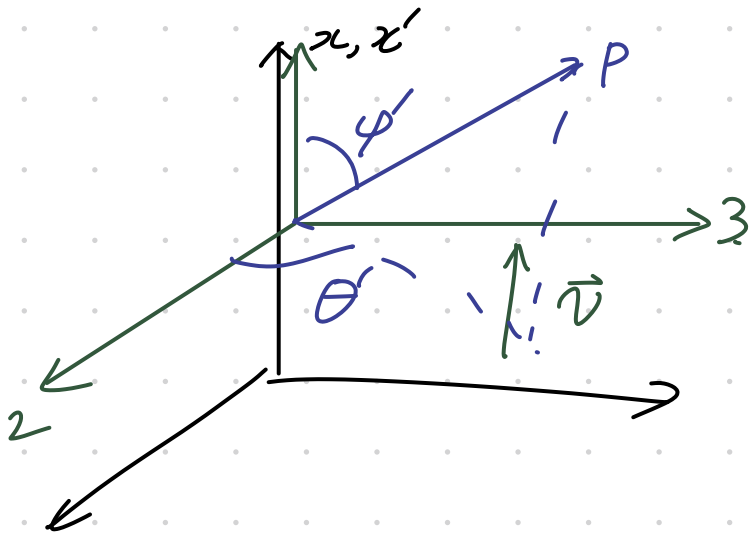
Transformation of velocities shows that they are not 4-vector.

하지만 $(\gamma u c, \gamma u \vec{u})$ 는 4-vector 이다.

τ 가 proper time 일 때,

$$U_0 \equiv \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx_0}{dt} = \gamma u c$$

$$\vec{U} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma u \vec{u}$$



$$E = \gamma m_0 c^2, \quad p_0 = \frac{E}{c}. \rightarrow \text{? } m_0: \text{ rest mass.}$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}$$

$$(p_0, \vec{p}) \in \text{four-vector el.}$$