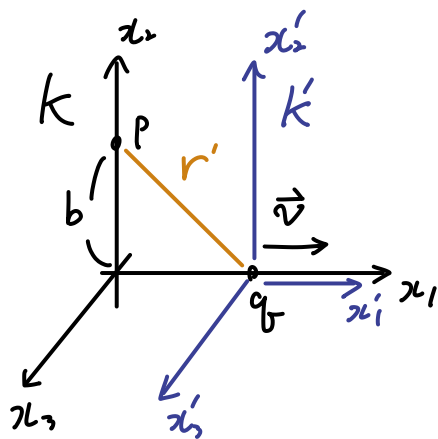


지난 시간에 배운 걸로 예시를 풀자.



charged particle 이  $x_1$ -direction 으로  $\vec{v}$  로 움직일

관찰점 P 에서 보는 전자기장은? Coordinate transform 을 이용.

$\vec{v}$  로 움직이는 frame  $K'$  를 생각      P 와 전하 사이 거리를  $r'$ .

$t = t' = 0$  에서 두 coordinate 는 같다.

목표:  $K'$  frame 기준으로 관찰자의 전자기장을 계산한 뒤  
 $K$  frame 의 전자기장으로 변환한다.

$K'$  coordinate 에서 관찰자의 좌표는  $(x'_1, x'_2, x'_3) = (-vt', b, 0)$

$t'$  을 사용함에 주목      관찰자가  $-v$  로 이동하며 멀어지고, 전하는 원점에 가만히.

$$(r')^2 = (vt')^2 + b^2$$

시간  $t'$  의 변환 관계는?  $ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct$

$K$ -frame 에서 관찰자의  $x$  좌표는 0 이므로.

이제  $K'$ -frame 에서 전자기장을 구하면,

단순히 쿨롱법칙으로  $\vec{E}' = q \frac{\hat{r}'}{r'^2}$ ,  $E'_3 = q \frac{x'_3}{r'^3}$ , 정전하이므로 자기장은 없다.

$$\begin{cases} E'_1 = -\frac{qv t'}{r'^3} \\ E'_2 = \frac{qb}{r'^3} \\ E'_3 = 0 \\ B'_1 = B'_2 = B'_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r' = [(v\gamma t)^2 + b^2]^{\frac{1}{2}} \text{ 대입}} \begin{cases} E'_1 = \frac{-q v \gamma t}{[(v\gamma t)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} \\ E'_2 = \frac{qb}{[(v\gamma t)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} \\ E'_3 = B'_1 = B'_2 = B'_3 = 0 \end{cases}$$

지난 시간에 유도한  
transform  
relation 을 활용.

$$\begin{cases} E_1 = E'_1 \\ E_2 = \gamma(E'_2 + \beta B'_3) \\ E_3 = \gamma(E'_3 - \beta B'_2) \\ B_1 = B'_1 \\ B_2 = \gamma(B'_2 - \beta E'_3) \\ B_3 = \gamma(B'_3 + \beta E'_2) \end{cases}$$

$$E_1 = E'_1 = \frac{-q v \gamma t}{[(v \gamma t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$E_2 = \gamma E'_2 = \frac{\gamma q b}{[(v \gamma t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$E_3 = \gamma E'_3 = 0$$

$$B_1 = B'_1 = 0$$

$$B_2 = -\beta \gamma E'_3 = 0$$

$$B_3 = \beta \gamma E'_2 = \frac{\beta \gamma q b}{[(v \gamma t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

신기하게도, K-frame 에서는  $x_3$  축에서 자기장이 발생.

Boost 가 커질수록  $B_3$  는 커진다.

$$v \rightarrow c \quad B_3 \rightarrow E'_2$$

비상대론적일 때,

$$\gamma \rightarrow 1, \quad \gamma \beta \rightarrow \frac{v}{c}, \quad \beta = 0$$

$$E_1 = \frac{-q v t}{[(v t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$E_2 = \gamma E'_2 = \frac{q b}{[(v t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$B_3 = \frac{v q b}{c [(v t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

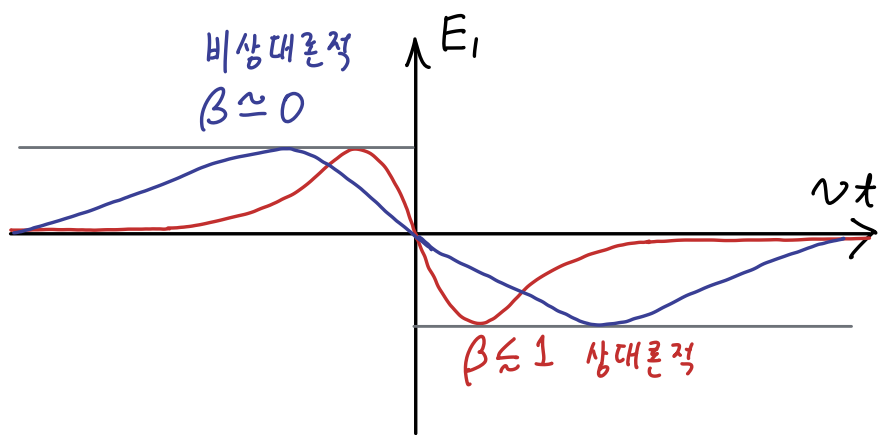
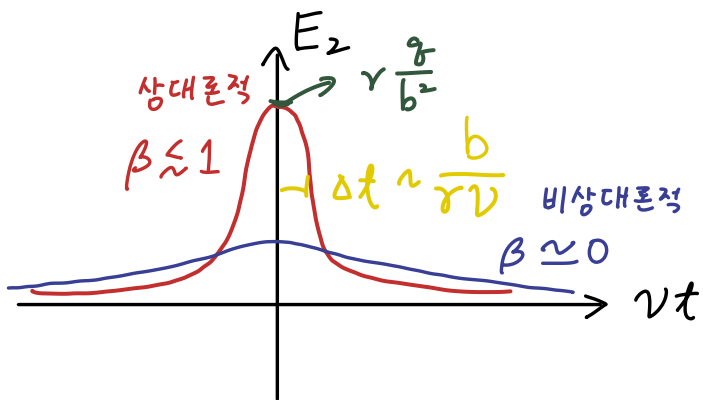
$$\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{비오 - 사바르 규칙이 돌아옴을 확인}$$

상대론적일 때, ( $\gamma \gg 1$ )

$$E_2(t) = \frac{\gamma q b}{[(\gamma t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$t=0$  에서  $E_2$  가 peak 를 찍는다.  $E_2(0) = \gamma \frac{q}{b^2}$  비상대론적일 때  $E_2(0)$  값에  $\gamma$  가 곱해진 것  
 $E_2$  를 시간에 대한 함수로 보면, 폭이  $\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}$  인 peak 이다.

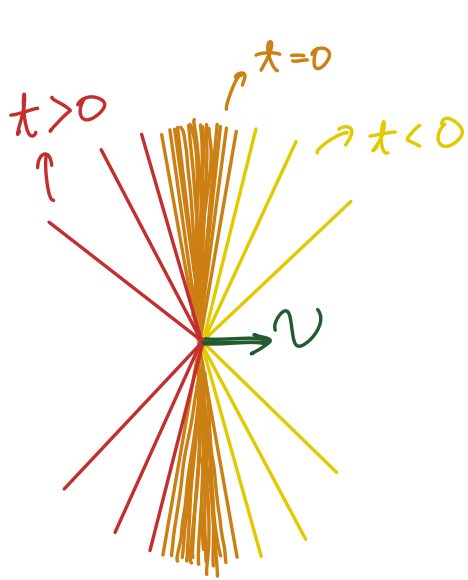
즉, 전하가 느리게 움직일 수록 ( $\gamma$  가 작아질 수록) peak 가 낮아지고 폭이 넓어진다.



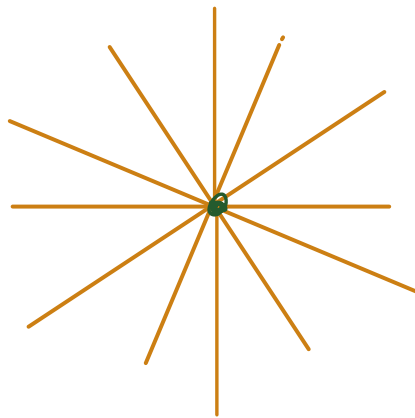
$$E_1(t) = \frac{-q v \gamma t}{[(\gamma t)^2 + b^2]^{3/2}}$$

그래프를 그려보면 이렇다.

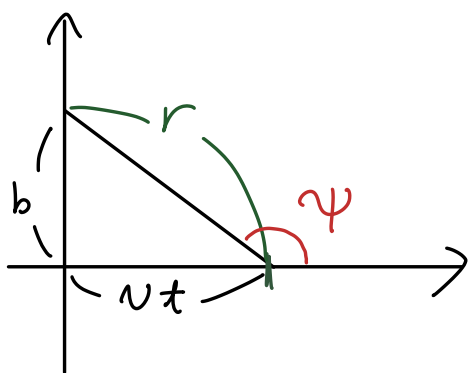
위 두 그래프를 통해 이동하는 전하는 비등방적으로 전자기장을 발산함을 알 수 있다.



$$\frac{E_1}{E_2} = -\frac{vt}{b}$$



멈춘 전하의 전기장은 등방적이다.



$$\begin{cases} vt = r \cos \psi \\ b = r \sin \psi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (v\gamma t)^2 + b^2 &= r^2 (\gamma^2 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = r^2 \{ (\gamma^2 - 1) \cos^2 \psi + 1 \} \\ &= r^2 \{ (\gamma^2 - 1)(1 - \sin^2 \psi) + 1 \} = r^2 \{ \gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \sin^2 \psi \} \\ &= r^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi) \end{aligned}$$

전기장을 각도  $\psi$  에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$E'_1 = \frac{-q v \gamma t}{[(v\gamma t)^2 + b^2]^{3/2}} = -q \frac{r \cos \psi}{r^3 \gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \psi]^{3/2}}$$

$$E'_2 = \frac{\gamma q b}{[(v\gamma t)^2 + b^2]^{3/2}} = q \frac{r \sin \psi}{r^3 \gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \psi]^{3/2}}$$

$$E = \frac{q r}{r^3 \gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \psi]^{3/2}}$$

$\beta \rightarrow 1$  일 수록  $\sin \psi$  가 살아나며 비등방성이 강해진다.

$$\begin{cases} \psi = 0 \text{ or } \pi & \rightarrow E \propto \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{q \vec{r}}{r^3} \right) \\ \psi = \frac{\pi}{2} & \rightarrow E \propto \gamma \left( \frac{q \vec{r}}{r^3} \right) \end{cases} \rightarrow \text{이 쪽이 더 크다.}$$

## Chapter 12 상대론적 입자의 역학

전자기학과 least action  $\rightarrow$  어떻게 유도되는가? 해석역학에서 하긴 했지.

수업 내용에서는 스킵하겠다. (12.1) 나중에 handout 으로 주겠다.

### 12.2 wave equation in covariant form (invariant Green function)

Maxwell's equation

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

$$\partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = \partial^\beta 0 = 0 \quad \text{Lorentz condition: } \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

$$\text{결국, } \square A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

이걸 풀기 위해 4-dim Green's function을 풀어야 한다.

그런데 로렌츠 변환에 불변인...

4-dim Green's function :  $D(x, x')$

Definition

$$\square_x D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') = \delta(x_0 - x'_0) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

• boundary가 없을 때,  $D$ 는  $x$ 와  $x'$ 의 차에만 dependent.

$$z^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$$

$$\square_z D(z) = \delta^4(z), \quad k \cdot z = k_0 z_0 - \vec{k} \cdot \vec{z}$$

$$\tilde{D}(k) : D(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot z} \quad \text{푸리에 변환 도입}$$

이걸 방정식에 대입. Fourier component  $\tilde{D}(k)$  를 구하자.

$$\delta^4(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot z}$$

$$\int d^4k \square_z \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot z} = \int d^4k e^{-ik \cdot z}$$

$\square_z$  는  $e^{-ik \cdot z}$  에만 적용.

$$\square_z e^{-ik \cdot z} = (-ik) \cdot (-ik) e^{-ik \cdot z} = -k \cdot k e^{-ik \cdot z}$$

$$\therefore \tilde{D}(k) = -\frac{1}{k \cdot k} \quad (\text{Jackson 12.12})$$

오, 간단하다.

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(-\frac{1}{k \cdot k}\right) e^{-ik \cdot z} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{z}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2}$$

$\rightarrow$  이게 정확히 무슨 값이고  
singularity가 어디 있지?

적분을 어떻게 하는가?

$z_0 > 0 \rightarrow$  lower-half plane 에서 contour is valid  $\rightarrow$   
 $z_0 < 0 \rightarrow$  upper-half plane 에서 "  $\rightarrow$  no singularities

$$\int dk_0 \frac{e^{-k_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} = -2\pi i \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} \right) = -\frac{2\pi}{k} \sin(k z_0)$$

이같은 때 singularity 를 포함하지?

잘 ~ 풀면  $D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \frac{\sin(k z_0)}{k}$

...

$$= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{1}{z} \int dk \sin(k z) \sin(k z_0)$$

$$R = |\vec{z}|$$

$$= \frac{\Theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk \sin(k R) \sin(k z_0)$$

$$\text{결론 : } D_r(x-x') = \frac{\Theta(x-x')}{4\pi R} \delta(x-x'-R)$$

내가 보기엔 reasonable 한 결과.

예전에 본 책 있는 3-dim Green function과 뭐가 다른 거지?

Retarded coordinate

$x-x'$ 의 부호를 바꾸면 advanced Green function 이 된다.

$$D_r(x-x') = \frac{\Theta(x'-x_0)}{4\pi R} \delta(x'-x_0-R)$$

$$\begin{aligned} \delta[(x-x')^2] &= \delta[(x-x_0)^2 - (\vec{x}-\vec{x}')^2] \\ &= \delta[(x-x'-R)(x-x'+R)] \\ &= \frac{1}{2R} \left[ \delta(x-x'-R) + \delta(x-x'+R) \right] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_r(x-x') &= \frac{1}{2\pi} \Theta(x-x_0) \delta[(x-x')^2] \\ D_a(x-x') &= \frac{1}{2\pi} \Theta(x'-x_0) \delta[(x-x')^2] \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{invariance}$$

이게 왜 invariant under Lorent's transform 이라고 하는 거지?

이제 파동방정식을 풀 수 있다.

$$\underline{A_{in}^\alpha(x)} = A_{in}^\alpha(x) + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x-x') J^\alpha(x')$$

이건 뭐지?