지난 시간, 에너지 보존을 배웠다.

$$\int \underbrace{\mathbb{J}\cdot\mathbb{E}}_{\text{mechanical work rate}} + \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{1}{2}\{\mathbb{E}\cdot\mathbb{D} + \mathbb{B}\cdot\mathbb{H}\}}_{\text{field energy}}\, d^3x = \oint \underbrace{(\mathbb{E}\times\mathbb{H})}_{\text{poyinting vector}}\cdot da$$

$\mathbb{S} = \mathbb{E}\cdot\mathbb{H}$. 차원은 $\left[\frac{\text{에너지}}{\text{면적}}\cdot\frac{1}{\text{시간}}\right]$ 즉, 단위 면적당 일률.

이제 운동량 보존이다.

로렌츠 힘 $\mathbb{F} = q(\mathbb{E} + v\times\mathbb{B})$

힘은 운동량 변화, 전하 밀도에 대해 계산한다면 공간 적분.

$$\cancel{\frac{d}{dt}} \int \rho(\mathbb{E} + v\times\mathbb{B})\, d^3x = \frac{dP_{mech}}{dt}$$

$\rho/\varepsilon_0 = \nabla\cdot\mathbb{E}$ 와 $\nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}$

이것들을 대입한다. 그러면 식이

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = \int\left[\mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E})\varepsilon_0 + \left(\nabla\times\mathbb{H} - \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}\right)\times\mathbb{B}\right] d^3x$$

이거 어디서 나오지?

$$= \varepsilon_0\int\left[\mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E}) + c^2\mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{B}) + \mathbb{E}\times\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} - c^2\mathbb{B}\times(\nabla\times\mathbb{B})\right] d^3x$$

$$- \varepsilon_0\int\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{[\mathbb{E}\times\mathbb{B}]}\, d^3x.$$

↳ poyinting vector의 형태인가?

두 벡터장 $\mathbb{A}$와 $\mathbb{B}$, $\frac{d}{dt}(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = \left(\frac{d\mathbb{A}}{dt}\right)\times\mathbb{B} + \mathbb{A}\times\left(\frac{d\mathbb{B}}{dt}\right)$ 가 성립하나?

이제 장의 운동량도 정의하자.

$$P_{field} = \varepsilon_0\int\mathbb{E}\times\mathbb{B}\, d^3x = \frac{1}{c^2}\int\mathbb{E}\times\mathbb{H}\, d^3x = \frac{1}{c^2}\int\mathbb{S}\, d^3x.$$

$\mathbb{g} = \frac{1}{c^2}\mathbb{S}$ 라고 정의하면, 이제 일률에서 운동량의 차원이 된다.

$$P_{field} = \int\mathbb{g}\, d^3x.$$

결국,

$$\frac{dP_{mech}}{dt} + \frac{dP_{field}}{dt} = \varepsilon_0\int\left[\mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E}) + c^2\mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{B}) + \mathbb{E}\times\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} - c^2\mathbb{B}\times(\nabla\times\mathbb{B})\right] d$$

↳ 예쁘지도 않고, 의미도 모르겠다.

우변의 의미를 해부하자.

$$\varepsilon_0 \int \Big[ \underbrace{\mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E}) + c^2\,\mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{B})}_{\text{비슷한 두 항.}} + \mathbb{E}\times\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} - c^2\,\mathbb{B}\times(\nabla\times\mathbb{B}) \Big]\, d^3x.$$

전기 역학에서 장에 대한 시간미분이 등장하면 전자기 유도 관계부터 떠올려라.

맥방에 따라, $\nabla\times\mathbb{E} = -\dfrac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$, $\quad \mathbb{E}\times\dfrac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} = -\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})$.

오호, 복잡한 식이지만 대칭을 찾을 수 있다는 교훈.

$$\varepsilon_0 \int \Big[ \mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E}) - \mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E}) + c^2\,\mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{B}) - c^2\,\mathbb{B}\times(\nabla\times\mathbb{B}) \Big]\, d^3x.$$

vector calulous. identity 를 써먹을 수 있는가?

$$\big[\mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E}) - \mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i = E_i\,\partial_j E_j - \big[\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i$$

아인슈타인 summation notation 을 쓰면, $\nabla\cdot\mathbb{E} = \partial_j E_j$ 이다.

$\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})$ 가 복잡한데, 레비치비타를 쓴다. 이미 알고 한번 정리해 보자.

$$[\nabla\times\mathbb{E}]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j E_k, \qquad \big[\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i = \varepsilon_{inm} E_n\,[\nabla\times\mathbb{E}]_m$$

$$\big[\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i = \varepsilon_{inm} E_n\,\varepsilon_{mjk}\,\partial_j E_k$$

이때, $\varepsilon_{inm}\varepsilon_{mjk} = \delta_{ji}\,\delta_{kn} - \cancel{\delta_{jk}\delta_{in}}\ \delta_{jn}\,\delta_{ik}.$

m 들이 사라지는 index.

$$\cancel{\big[\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i = (\delta_{ij}\delta_{kn})E_n\partial_j E_k - (\delta_{jk}\delta_{in})E_n\partial_j E_k}$$

$$\cancel{= E_k\,\partial_i E_k - E_i\,\partial_k E_k}$$

~~→ divergence~~

$$\big[\mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i = (\delta_{ji}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{ik})\,E_n\,\partial_j E_k$$

$$= E_k\,\partial_i E_k - E_j\,\partial_j E_i.$$

$$\big[\mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbb{E}) - \mathbb{E}\times(\nabla\times\mathbb{E})\big]_i = E_i\,\partial_j E_j - E_j\,\partial_i E_j + E_j\,\partial_j E_i.$$

$$= \partial_j(E_i E_j) - \frac{1}{2}\,\partial_i E_j^2$$

$c^2\,\mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{B}) - c^2\,\mathbb{B}\times(\nabla\times\mathbb{B})$ 에 대해서도 똑같은 걸 할 수 있다.

이걸 통으로 이해해야 함.

$$\frac{d}{dt}\left(P_{mech} + P_{field}\right)_i = \boxed{\oint T_{ij}\,\hat{n}_j\, d^2x = \int \partial_j T_{ij}\, d^3x.}$$

아마 확장된 green's theorem

$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 \left[E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\cdot\mathbb{E} + c^2\,\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}\right)\delta_{\alpha\beta}\right].$$

이것을 Maxwell stress tensor 라고 한다.
차원은 힘/면적.
질문) 원래 stress tensor 의 형태와 용도는 어떤 거였을까?

$\oint T_{ij}\,\hat{n}_j\, d^2x$ 은 부피 표면에 작용하는 스트레치를 적분하겠다는 의도이다.

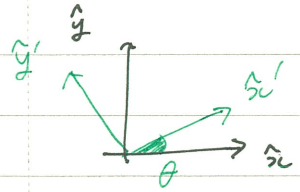
우리는 conservation 에서 $\mathbb{E}$ 와 $\mathbb{B}$의 대칭성을 발견했다.
다음 주제로 넘어간다.

Symmetry property of Electromagnetic field. (6.10 Jackson)

공간 회전/반사/ time reversal 에 어떤 성질을 가지나?

회전/반사 변환은 뭔가? 공간 변환을 해도 길이가 변치 않아야.
즉, orthogonal matrix (tranformation) 이어야 한다.

Orthogonal transformation 이 뭔가?
변환된 좌표에 프라임을 붙이자.




변환된 unit vector를 변환 이전 unit vector의 linear summation 으로 나타낼 수 있어야한다.

$\hat{x}'_i = a_{ij}\,\hat{x}_j$.  $a_{ij}$가 아마 변환 행렬의 요소일 것이다.

$a_{ij} = \hat{x}'_i \cdot \hat{x}_j$. 라는 게 자명하다. (unit vector 의 orthogonality 로 인해서).

$$\delta_{ij} = \hat{x}'_i \cdot \hat{x}'_j = a_{ik}\, a_{jl}\, \hat{x}_k \cdot \hat{x}_l = \delta_{kl}\, a_{ik}\, a_{jl} = a_{ik}\, a_{jk}$$
$$= a_{ik}\left[\tilde{a}\right]_{kj} \qquad \cancel{= a_{ik}\left[\tilde{a}\right]_{jk}}$$

그래서 $a\tilde{a} = \mathbb{1}$ 항등행렬. $\tilde{a} = a^{-1}$.

$a$의 전치행렬은 역행렬과 같다. 이런걸 orthogonal matrix라 부름.

즉, 역변환은 그냥 전치행렬임. 행렬이 변환 전후 unit vector의 dot product로 정의되므로 당연한 일.

이건 처음 보는 내용.

determinant는 $1 = \det(a\tilde{a}) = \det(\mathbb{1}) = \det(a)\det(\tilde{a}) = |\det(a)|^2$

$\det(a) = \pm 1.$

similarity transformation.

그냥 matrix $A$에 대해.

$$y = Ax \quad \longleftrightarrow \quad y' = A'x'$$

$A' = SAS'$ . 왜냐면.

$y' = SAS'x' = SAx.$ $\quad S^{-1} = S'$ 라면,

$S'y' = Ax \qquad y = Ax.$