전자기장의 대칭적특성.

어떤 대칭을 보는가? 회전이다. 회전변환은 $X_i' = a_{ij}X_j$, $a_{ij} = (a^{-1})_{ji}$

2nd rank tensor는 어떻게 회전변환시키나? 각 차원에 각각 a로 인덱스 축약하면 된다. $B'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\delta}\, B_{\gamma\delta}$

$\vec{A} = \mathbb{B}\times\mathbb{C}$, $A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k$.

$A_i' = \det(a)\, a_{ij} A_j$ rotation의 경우는 $\det(a) = 1$ 이다.

변환에 있어 외적의 결과도 벡터처럼 변환된다.

또 다른 변환으로 reflection이 있다 I라고 쓰겠다.

x-y plane을 반사면으로 잡은 경우,

$$X_i(x,y,z) \xrightarrow{I_z} X_i'(x,y,-z) = X_i'(x',y',z')$$

$x_i \to x_i' = x_i$

$y_i \to y_i' = y_i$

$z_i \to z_i' = -z_i$

점대칭, space inversion의 경우 모든 부호가 바뀐다. $X_i \to X_i' = -X_i$

벡터의 경우도 마찬가지다. $v \to v' = -v$

axial vector(psudopolar vector)인 경우, $A \to A' = \oplus A$

왜 이런가? $\mathbb{C} = \mathbb{E}\times\mathbb{F}$ 일 때,

$\mathbb{C}' = (-\mathbb{E})\times(-\mathbb{F}) = \mathbb{E}\times\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Pseudo scalar 인 경우,

예를 들어 $A\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = d$ 라면, d는 pseudoscalar.

$d' = A'\cdot(\mathbb{B}'\times\mathbb{C}') = (-A)\cdot(-\mathbb{B}\times -\mathbb{C}) = -d$.

스칼라 답지 않게 inversion에 부호가 바뀐다.

보통 N-th rank tensor는 inversion에 대해

$M^{N'} = (-1)^N M^N$ 인 경우는 그냥 tensor

$M^{N'} = (-1)^{N+1} M^N$ 인 경우는 pseudo tensor 이다

Time reversal : T.

$T(t) \rightarrow t' = -t$

$T(\mathbb{x}) \rightarrow \mathbb{x}' = \mathbb{x}$ 위치 벡터는 변하지 않는다.

$T(\mathbb{p}) \Rightarrow T\left(m\frac{d\mathbb{x}}{dt}\right) \longrightarrow \mathbb{p}' = m\left(-\frac{dx}{dt}\right) = -\mathbb{p}.$ 운동량은 부호가 바뀐다.

뉴턴의 운동방정식은 time reversal 에 invariant 한가?

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = m\frac{d\mathbb{x}}{dt^2}$$

time reversal.

$$m\left(\frac{d}{-dt}\right)\left(-\frac{d}{dt}\right)x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\ddot{\mathbb{x}} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$ 그대로이다.

time reversal 를 하면 본래 final condition 이었던 곳에서 initial state 로 향해 evolve 한다.

각 변환을 할 때, RIT 를 다하면 전기역학적 물리량은 어찌 변하나.

(i) 전하밀도 $RIT(\rho) \rightarrow \rho$ true scalar 이다

(ii) $I(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}' = \mathbb{E}$ true vector 이다.

$T(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}' = \mathbb{E}$ 시간 역전에 invariant.

$\nabla\cdot\mathbb{E} = \rho/\varepsilon_0$ 는 ~~E에 invariant 하다.~~

$I(\rho/\varepsilon_0) = \rho/\varepsilon_0$

$I(\nabla\cdot\mathbb{E}) = (-\nabla)\cdot(-\mathbb{E}) = \nabla\cdot\mathbb{E}.$

그래서 inversion 에 대해 $\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 는 invariant 하다.

(iii) $\mathbb{B}$ 는 어떤가? $\mathbb{B}$는 pseudo vector 다.

$I(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$

$T(\mathbb{B}) = -\mathbb{B}.$

$\mathbb{F} = q(v\times\mathbb{B})$ 이었는데, $\mathbb{F}$와 v는 real vector 이니 $\mathbb{B}$는 pseud

아니면 $\nabla\times\mathbb{B} = J\mu_0$ 로도 증명 가능.

$\nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$ 는 어떤가? inversion 에 invariant 해야한다.

$I(\nabla\times\mathbb{E}) = \nabla\times\mathbb{E},\quad I\left(-\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}\right) = \cancel{\oplus} - \frac{\partial}{\partial t}I(\mathbb{B}) = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$

(iv) current density $\mathbb{J}$ 는?

$I(\mathbb{J}) = -\mathbb{J}$

$T(\mathbb{J}) = -\mathbb{J}$.

$\mathbb{J} = \rho \mathbb{v}$ 를 이용해서도 증명할 수 있지 않나?

(V) $\mathbb{P}$ polarization 은 어떤가?

$I(\mathbb{P}) = -\mathbb{P}$, $T(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$

$\mathbb{P}$ 를 $\mathbb{B}$ 에 대한 polynomial 로 나타내면?

$\mathbb{P} \propto \chi_{p} \mathbb{E} +$ higher order term of $\mathbb{E}$.

일단 $\mathbb{P}$ 를 $\mathbb{B}$ 아예 없이 나타낼 수 있을 것이다.

$\mathbb{P}$ 를 $\mathbb{B}$ 에 대한 first order 로 나타낸다면?

	$\mathbb{E} \times \mathbb{B}$	$\left(\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}\right) \times \mathbb{B}$	$\left(\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2}\right) \times \mathbb{B}$
inversion	$-$	$-$	$-$
Time reversal	$-$	$+$	$-$

즉, $\left(\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}\right) \times \mathbb{B}$ 만 $\mathbb{P}$ 의 특성을 만족한다.

왜 $\mathbb{E} \times \mathbb{B}$ 만 생각하지? $\mathbb{E} \cdot \mathbb{B}$ 는 생각 안 하고? $\mathbb{E}$ 랑 $\mathbb{B}$ 는 항상 직교하나?

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbb{P} = \chi_0 \mathbb{E} + \chi_1 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \times \mathbb{B} + \chi_2 (\mathbb{B} \cdot \mathbb{B}) \mathbb{E} + \chi_3 (\mathbb{E} \cdot \mathbb{B}) \mathbb{B}$$

그런데 $\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \times \mathbb{B}$ 가 진짜 물리적으로 영향을 주나? 그런 사례가 있다고 한다.

이게 chapter 6 끝이다.

magnetic monopol 에 대한 이야기는 직접 책에서 읽어보기를.

Chapter 7으로 넘어간다. 전자기장에 대해.

nonconducting media 에서 plane EM wave 의 성질.

- transverse nature
- polarization

ε 랑 μ 가 다른 medium 에 진입하면 빛은 어떻게 되는가? → Freshel formul

- phase, group velocities in media
- causality : kramers - kronig relation.

↳ 공부한 적 없는 거 같은데?

plane wave in nonconducting media.

진공에서 맥방. 전하 전류 둘 다 없다.

$$\begin{cases} \nabla\cdot \mathbb{B} = 0 \\ \nabla\cdot \mathbb{E} = 0 \\ \nabla\times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ \nabla\times \mathbb{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \end{cases}$$

solution 이 $e^{-i\omega t}$ 꼴이라고 가정.

시간에 대해 푸리에 변환 해서 $\mathbb{E}(t, x) \to \mathbb{E}(\omega, x)$ 의 solution 을 구하자.

푸리에 변환하면 $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ 로 바뀜.

$$\begin{cases} \nabla\cdot \mathbb{B} = 0 \\ \nabla\cdot \mathbb{E} = 0 \\ \nabla\times \mathbb{E} = i\omega \mathbb{B} \\ \nabla\times \mathbb{B} = \dfrac{1}{c^2}(-i\omega)\mathbb{E}. \end{cases}$$

이걸 풀자.

$$\begin{cases} \nabla\times(\nabla\times \mathbb{E}) - i\omega\, \nabla\times\mathbb{B} = 0 \\ \nabla\times(\nabla\times\mathbb{B}) + \frac{1}{c^2} i\omega\, \nabla\times\mathbb{E} = 0 \end{cases} \longrightarrow \nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbb{E} = 0.$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} = -\nabla^2\mathbb{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbb{E}$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbb{E} = 0.$$

Halmholtz equation.

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

solution 이 $e^{ikx - i\omega t}$ 라고 가정하면, $\nabla^2 \rightarrow -k^2$

$$-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

phase velocity of the wave.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad n = \frac{v}{c},$$ ~~우리는 n은 index of~~

n을 index of refraction 이라 부른다.

$$e^{ikx - i\omega t} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)} = e^{ik(x - vt)}$$

말 그대로, ~~phase velocity에 작용하는 게~~
phase 에 작용하는 게 phase velocity.

일반적인 solution은 오른쪽으로 가는 파동과 왼쪽으로 가는 파의 선형합.

$$u(x,t) = a e^{ikx - i\omega t} + b e^{-ikx - i\omega t}$$

파수를 고정,

$$u_k(x,t) = a e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)} + b e^{-ik(x + \frac{\omega}{k}t)}$$

nondispersive media 에서는 μ 와 ϵ 가 ω 에 independent.

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u_k e^{ikx} dk.$$