Fresnel equations

외우자!

$k \propto \sqrt{\mu\varepsilon} \propto n$

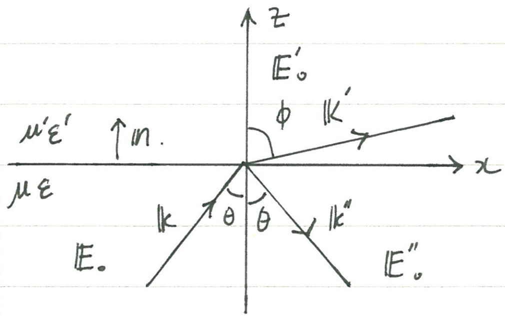
위는 모두 $\propto \frac{1}{v}$

$B_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{k}$

$B_0 \propto \mathbf{k}\times\mathbf{E}$

이전 까지는 반사와 굴절에 의한 각도를 공부했다.

이제는 입사·굴절·반사의 전기장 세기 관계를 알아보자.



입사파 관련 기호는 아무 표시 없음.

굴절파는 프라임(′) 1개

반사파는 프라임 두 개 (″)

매질 경계 표면에서 나가는 방향의 법선 벡터가 $\mathbf{n}$.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{D}=0\\ &\nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ &\nabla\times\mathbf{E}=0\\ &\nabla\times\mathbf{H}=0\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

이 맥스웰 방정식을 경계에 적용하면 어찌 될까?

용어 정리) normal component : 경계면에 수직, $\mathbf{n}$과 평행

tangential component : 경계면에 평행, $\mathbf{n}$과 수직.

(i) $\left[\varepsilon(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_0'') - \varepsilon'\mathbf{E}_0'\right]\cdot\mathbf{n} = 0$ → $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$ 에서 유래

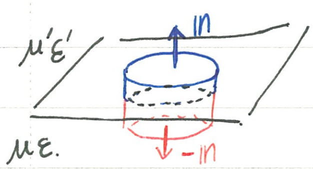
(ii) $\left[\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0'\right]\cdot\mathbf{n} = 0$ → $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 에서 유래

(iii) $\left[\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0'\right]\times\mathbf{n} = 0$ → $\nabla\times\mathbf{E}=0$ 에서 유래

(iv) $\left[\frac{1}{\mu}(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 + \mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'}(\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0')\right]\times\mathbf{n} = 0$ → $\nabla\times\mathbf{H}=0$ 에서 유래.

식 (i) 과 (ii) 에는 $\cdot\mathbf{n}$이 들어가므로, normal component가 continuous 하다는 이야기다. 식 (iii) 과 (iv) 에는 $\times\mathbf{n}$이 들어가므로, tangential component가 continuous 하다는 이야기다.

(i) 과 (ii) 유도하는 방법 → $\int \nabla\cdot\mathbf{D}\,dv = \int_{\partial V} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}$ 를 이용.

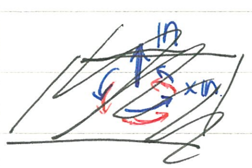


적분하는 부피로 ~~두께가~~ 두께가 아주 얇은 원판을 잡는다.

$$\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = A\left[\underline{\mathbf{E}_0'\cdot\mathbf{n}} - \underline{(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_0'')\cdot\mathbf{n}}\right] = 0.$$

여기서 A는 원판 뚜껑의 면적. $\mu'\varepsilon'$ 매질에서는 $d\mathbf{a}$로 $A\cdot\mathbf{n}$를 이용하고, $\mu\varepsilon$ 매질에서는 $d\mathbf{a}$로 $-A\cdot\mathbf{n}$ 매질를 이용하는 게 핵심.

(iii) 과 (iv) ~~을~~ 유도하는 방법



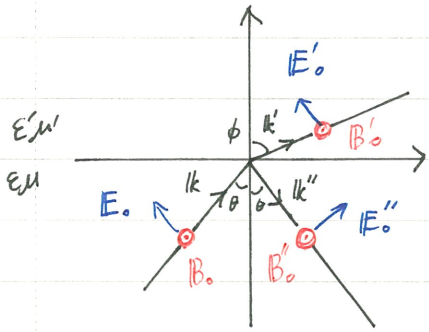
표면 양쪽에서 tangential한 성분이 같아야 한다.

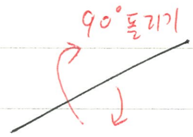
$\mathbf{n}$과 수직한 성분이 같아야 한다.

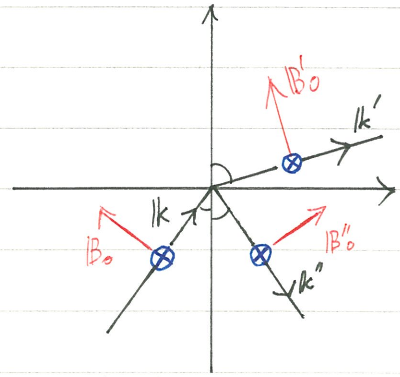
$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'')\times\mathbf{n} = \mathbf{E}_0'\times\mathbf{n}.$ $\mu'\varepsilon'$ medium쪽 ㅜ성분 = $\mu\varepsilon$ medium쪽 ㅜ성분

$[\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0']\times\mathbf{n} = 0.$

두 가지 편광 상태를 생각할 수 있다.







Electric field is parallel to the plane of incidence

Electric field is perpendicular to the plane of incidence.

plane of incidence 는 $\mathbb{k}$ 벡터와 $\mathbb{n}$ 벡터가 있는 면. 즉 종이(모니터) 면.

⟨parallel to the plane of incidence⟩ 의 경우에, 앞서 본 식 (iii) 과 (iv) 를 적용.

※ 주의, 볼드체가 아닌 글자는 스칼라 값.
그리고 부호 엄청 헷갈림.

식 (iii) ⟶ $\mathbb{E}_0$의 tangential 성분은 음수, $\mathbb{E}_0'$의 tangential 성분도 음수, $\mathbb{E}_0''$만 양수.

$$(E_0'' - E_0)\cos\theta = -E_0'\cos\phi$$

~~[illegible]~~

$$E_0'' = -\frac{\cos\phi}{\cos\theta}E_0' + E_0$$

스넬의 법칙 적용.

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\phi} = \frac{n'}{n}$$

$$\cos\phi = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta}.$$

이것은 ϕ를 ◦식에서 없애버리기 위해서 이다.

$$E_0'' = -\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{1-\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta}\,E_0' + E_0$$

식 (iV) → $\mathbb{B}$들의 방향이 입사·굴절·반사 파 전부 같음. ◦ $\mathbb{B}\times\mathbb{n}$의 부호 같음.

$\frac{1}{\mu}k \propto \sqrt{\epsilon/\mu}$ 을 이용.

$$\sqrt{\tfrac{\epsilon}{\mu}}\,(E_0 + E_0'') - \sqrt{\tfrac{\epsilon'}{\mu'}}\,E_0' = 0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\tfrac{\epsilon'}{\mu'}}\,E_0' = \sqrt{\tfrac{\epsilon}{\mu}}\left(2E_0 - \frac{E_0'}{\cos\theta}\sqrt{1-\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta}\right.$$

이제 E_0'와 E_0의 비율, 반사율을 알아보자., $n \propto \sqrt{\mu\epsilon}$, $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \propto \frac{n}{\mu}$.

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}{\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{1-\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta}\right)} = \frac{2\frac{n}{\mu}\cos\theta}{\frac{n'}{\mu'}\left(\cos\theta + \sqrt{1+\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta}\right)} = \frac{2nn'\cos\theta}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\theta + n'\sqrt{n'^2+n^2\sin^2\theta}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos\theta - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos\theta + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}$$

만약 빛이 표면에 똑바로 쏘아진다면, $\theta = 0$ 이라면,

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} + 1} \xrightarrow{\mu' = \mu} \frac{2n}{n' + n}$$

첫번째 매질의 굴절률이 클 수록 반사가 잘 된다.

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} + 1} \longrightarrow \frac{n' - n}{n' + n}.$$

$n' > n$ 일 경우, E_0''와 E_0의 방향이 같다. 이는 반사되면서 phase reversal이 일어났음을 의미.

⟨perpendiculare to the plane of incidence⟩ 인 경우.

식 (iii) 과 (iV) 를 이용하면

$$\begin{cases} E_0 + E_0'' - E_0' = 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(E_0'' - E_0)\cos\theta + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\,E_0'\cos\phi = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(E_0' - 2E_0)\cos\theta + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\,E_0'\cos\phi = 0$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta.}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\phi}$$

잘 정리하면,

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos\theta}{n\cos\theta + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos\theta - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}$$

질문) 왜 식 (i)과 (ii)는 유도에 잘 이용하지 않지?

Brewster angle.

반사된 빛은 주로 반사 표면에 평행한 방향으로 편광되어 있다.

incident plane 에 평행한 빛은 잘 반사되지 않기 때문이다.

이쪽 편광이 완전히 반사되지 않는 각을 Brewster angle 이라 부른다.

아까 본 식,

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos\theta - n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos\theta + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}}$$

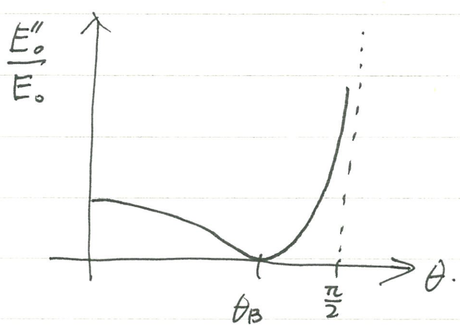
여기에 $\frac{E_0''}{E_0} = 0$ 으로 만드는 각이 있다.

$\mu = \mu'$ 라고 두면, $\frac{n'^2}{n^2}\cos^2\theta = 1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta$ 이면 그 각도다.

θ_B 라고 두고, $\frac{n'}{n} = \pi$ 라고 두면,

$$\pi^2 \cos^2\theta_B = \cos^2\theta_B + \sin^2\theta_B - \pi^{-2}\sin^2\theta_B.$$

$$\tan^2\theta_B = \frac{\pi^2 - 1}{1 - \pi^{-2}} = \pi^2. \qquad \therefore \tan\theta_B = \frac{n'}{n}.$$



θ_B 이전에는 반사율이 낮았다가, 그 이후로는 급격히 증가.

반사·굴절은 끝, 이제 Dispersion 에 대해 공부하자.

ε 와 μ 가 frequency 에 따라 달라지는 이유가 뭘까?

왜 ω 에 따라 굴절률이 달라져서 무지개가 생기는 걸까.

A. simple model for $\varepsilon(\omega)$

핵에 bound 된 전자가 damped harmonic oscillation 하는 경우.

low density medium 에서 통하는 모델이다.

electric field 가 $\mathbb{E}(x,t)$ 일 때, 전자의 equation of motion 은,

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = -e\,\mathbb{E}(x,t)$$

binding frequency 라 부름

γ은 damping, ω_0는 harmonic potential 의 특성. 자기장은 무시.

아주 작은 진폭으로 전자가 움직여서 전기장의 영향을 공간에 대해 average 할 수 있다 가정. E 가 $e^{-i\omega t}$ 로 oscillation 할 때,

시간이 충분히 지나면, 전자의 진동수는 외력의 진동수인 ω와 같아진다는 걸 알고 있다. 위상차 ϕ 일 때,

$$x(t) \propto e^{-i\omega t + i\phi}$$

$$\dot{x} = -i\omega x \ , \quad \ddot{x} = -\omega^2 x .$$ 운동방정식에 대입.

$$m\left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2\right]x = -eE.$$

전자의 dipole moment는,

$$P = -ex = \frac{e^2}{m}\left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right]^{-1} E$$

unit volume에 N개 분자들이 있고, 분자당 Z개 electron이 있을 때, ω_j의 bing frequency ~~를 가지는~~ 와 γ_j의 damping을 가지는 전자가 분자 1개당 f_j개가 있다고 치자. 이들을 모두 합한 dipole moment가 ε에 영향을 줄 것이다.

$$P_{total} = \frac{e^2}{m} N \sum_j f_j\left[\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j\right]^{-1} E.$$

electric susceptibility 의 정의는

$\chi_e = \dfrac{P_{total}}{\varepsilon_0 E}$ 이며, $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$ 의 관계이다.

외우자!

따라서,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j f_j\left[\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j\right]^{-1}$$

f_j는 이를 만족, $Z = \sum_j f_j$

Anormalous dispersion 방금 본 $\chi_e = \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j \dfrac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$ 를 이용해 $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\omega)$의 real part 와 imaginary part를 구별해 보자.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2}$$

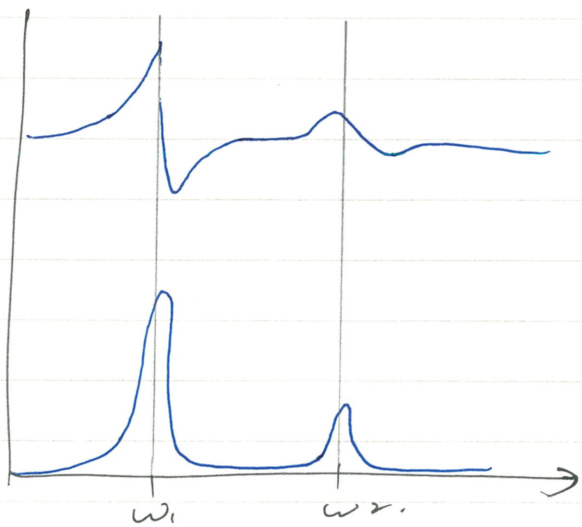
$$\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{\gamma_j\omega f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2}$$

Imaginary part 가 확 커지는 지점이 있다. 바로 분모가 0에 가까워 지는 지점.

$$\frac{\Gamma/2}{(x-x_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

꼴로 생긴 함수를 Lorentz function 이라고 부르며, 이로 인해 생긴 peak를 Lorentzian peak 라고 부른다.

~~지금 보고 있는 $\mathrm{Im}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$는~~



Imaginary peak 가 있는 진동수 근처에서, $\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$ 에는 특이한 일이 일어난다

peak 이 일어나기 이전 구간은 ω가 증가하면 $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ 도 증가하는 normal dispersion 이 일어나지만, peak 직후에는 ω가 증가하면 $\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$ 가 급격히 떨어지는 anomalous dispersion 이 일어난다.