ED - week 6 - 2

외우기! $\chi_e = \frac{\mathbb{P}}{E\varepsilon_0}$ dipole moment.

지난 시간, simple Lorentz model에 대해 배웠다.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

ω는 전기장의 frequency

ω_j는 j종류 전자의 bound frequency.

ε가 complex라면, 이것의 허수부는 무얼 의미하나?

wave number $k = \beta + i\frac{\alpha}{2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

전자기파의 파수는 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 라고, 익히 알고 있다. $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ 이므로,

$$k = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\cdot\frac{\omega}{c} \simeq \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = n\frac{\omega}{c}$$

$\mu = \mu_0$ 라고 두었다.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} + i\alpha\beta.$$

허수부와 실수부를 비교하면,

$$\mathrm{Re}(k^2) = \beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right], \quad \mathrm{Im}(k^2) = \frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right] = \alpha\beta.$$

k의 imaginary part가 작다면, $\alpha \ll \beta$, $\alpha = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]$

$$\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} \simeq \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right], \quad \beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\omega}{c}\frac{\mathrm{Im}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]}{\sqrt{\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]}} = \beta\frac{\mathrm{Im}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]}{\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]}$$

α는 사실 전기장 세기의 exponential decay이다. $e^{ikx} = e^{-\frac{\alpha}{2}}\cdot e^{i\beta x}$.

$$I \propto |\mathbb{E}|^2 \propto e^{-\alpha}.$$

따라서, $\mathrm{Im}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]$가 $\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]$에 비해 커질수록, ε의 imaginary part가 커질수록 빛은 media를 통과 못하고 exponential decay한다.

☆ Low frequency ~~behav~~ behavior, Drude model. optical conductivity of metal.

bound frequency가 0에 가까운 자유 전자의 비율을 f_0라고 두자.

$\varepsilon(\omega)$은 bound electron에 의한 항과 자유전자에 의한 항으로 분리할 수 있다.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + i\frac{Ne^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}$$

→ 시험에 나올지도.

$\varepsilon_b(\omega)$는 $\omega_j \neq 0$ 인, bound frequency가 0이 아닌 전자 영향

나머지 항은 bound frequency가 0인 free electron의 영향.

f_0가 있는 항이 major해질 경우, $\omega \to 0$ 일때 $\mathrm{Re}(\varepsilon)$가 급격히 커진다.

암페어 규칙에 적용해 보자. $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$

전류 밀도는 옴의 법칙을 따른다. σ가 conductivity 일 때 $\mathbb{J} = \sigma \mathbb{E}$.

$$\nabla \times \mathbb{H} = \sigma \mathbb{E} + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathbb{E} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbb{E} = -i\omega(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})\mathbb{E}$$

무슨 논리인지 모르겠는데, 책에서는

$\nabla \times \mathbb{H} = -i\omega(\varepsilon_b + i\frac{\sigma}{\omega})\mathbb{E}$ 라고 한다. 왜 ε_b를 쓰는거지?

또 무슨 논리인지 모르겠는데 위 결과를 $\varepsilon(\omega)$와 비교하면,

$$\sigma = \frac{Ne^2 f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)}$$

가 된다.

즉, free electron이 conductivity를 만든다.

지금 내용이 low frequency 조건이랑 대체 무슨 연관이지?

High frequency limit, plasma frequency.

$\omega \gg \omega_j$ 전기장이 resonance frequency보다 더 높은 진동수에서.

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \sim -\frac{1}{\omega^2}\left(-\frac{\omega_j^2}{\omega^2} + 1 + i\frac{\gamma_j}{\omega}\right)^{-1}$$

이를 테일러 전개, $\frac{1}{\omega^2}$도 작고, $\frac{1}{\omega}$도 작다.

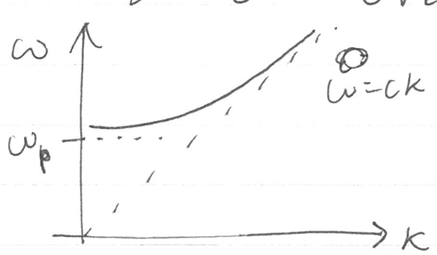
$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \simeq -\frac{1}{\omega^2}\left(1 - i\frac{\gamma_j}{\omega} + O(\omega^{-2})\right)^{-1}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{Z}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$ plasma frequency.

파수와 ω 사이 관계를 알 수 있다.

$\mu = \mu_0$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}.$$



ω가 ω_p보다 크지 않으면 k가 허수이다. 즉,

빛이 투과하지 못하고 medium에 들어오면 감쇄한다.

$\omega > \omega_p$ 라면 $\varepsilon > 0$, 금속이 빛을 투과하기 시작하며, 이를
UV transparency of metal 이라고 한다.

Causality, $\mathbb{D}$ 와 $\mathbb{E}$ 의 관계.

ε가 상수가 아니라 frequency dependency 가 있으면 / $\mathbb{E}$의 변화와 $\mathbb{D}$의 변화 사이 시간 지연이 있을 수 있다. 즉, ε는 temporally nonlocal 하게 $\mathbb{D}$와 $\mathbb{E}$를 이어준다.

기본 식: $\mathbb{D}(x, \omega) = \varepsilon(\omega)\, \mathbb{E}(x, \omega)$.

이식을 $\mathbb{D}(x,t)$ 와 $\mathbb{E}(x,t)$ 에 대한 식으로 바꿔주기 위해 푸리에 변환을 잘 해야 한다.

$$\mathbb{D}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbb{D}(x,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varepsilon(\omega)\, \mathbb{E}(x,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} \left(\int dt' \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathbb{E}(x,t')\, e^{i\omega t'} \right) d\omega$$

$\mathbb{E}(x,t)$ 에 대한 식으로 바꾸기

시간 지연의 영향은 ε와 ε_0의 상대적인 차이로 발생한다는 점을 강조.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(\frac{-\varepsilon_0 + \varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} + 1 \right) = \varepsilon_0 \left(1 - 1 + \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 (\phi + 1)$$

을 대입, 나는 새로운 notation으로 $\phi_{(\omega)} = \dfrac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ 을 쓰고 산다

$$\mathbb{D}(x,t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \iint e^{-i\omega(t-t')}\, \mathbb{E}(x,t')\, d\omega\, dt' + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \iint e^{-i\omega(t-t')}\, \phi(\omega)\, \mathbb{E}(x,t')\, d\omega\, dt'$$

첫번째 항에 대해, ω 적분을 먼저 하면 $2\pi\, \delta(t-t')$ 가 나온다.

$$\frac{\varepsilon_0}{2\pi} \iint e^{-i\omega(t-t')}\, \mathbb{E}(x,t')\, d\omega\, dt' = \varepsilon_0 \int \delta(t'-t')\, \mathbb{E}(x,t')\, dt' = \varepsilon_0 \mathbb{E}(t)$$

두 번째 항에 대해, 반응과 입력사이의 시간 지연을 나타내는 변수 $\tau = t - t'$ 를 이용해 표현, response function 을 이용해 적분을 나타낼 수 있다. 역시 ω에 대해 먼저 적분,

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \phi(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega.$$

$$\therefore\ \mathbb{D}(x,t) = \varepsilon_0 \mathbb{E}(t) + \varepsilon_0 \int G(\tau)\, \mathbb{E}(x, t-\tau)\, d\tau$$

Lorentz model 의 $\varepsilon(\omega)$ 를 적용하자.

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega$$

유수 정리를 이용해 계산해야 한다.