ED week 11 -1.

지난 시간 복습

ε 가 시간에 즉각적이지 않다면, $\mathbb{D}$와 $\mathbb{E}$의 관계식은 어떻게 되는가?

일단 진동수 공간에서는 즉각적이라고 가정하자.

$\mathbb{D}(x,\omega) = \varepsilon(x,\omega)\,\mathbb{E}(x,\omega)$ 이걸 역푸리에 변환하면 response function 꼴의 적분 관계식을 얻는다.

$$\mathbb{D}(x,t) = \varepsilon_0\left[\mathbb{E}(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\,\mathbb{E}(x,t-\tau)\,d\tau\right]$$

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1\right] e^{-i\omega\tau}\,d\omega.$$

$\tau = t - t'$ 질문) 인과 관계를 생각하면 음수 τ에 대해서는 적분하지 말아야 할 것 같은데.

$\varepsilon(\omega)$가 상수라면, 상수의 푸리에 변환은 디락 델타.

$G(\tau) \propto \delta(\tau)$, $\mathbb{D} = \varepsilon\,\mathbb{E}$ 가 된다.

Lorentz model 에 따랐을 때 $\varepsilon(\omega)$와 $G(\tau)$는 어떻게 구해지나?

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 = \omega_p^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\,d\omega$$

분모가 0이 되는 지점을 pole 이라고 한다. $\omega_\pm = -\frac{i\gamma}{2} \pm \nu_0$, $\frac{\omega}{\nu_0^2} = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)}\,d\omega$$

pole은 복소평면의 3사분면 / 4사분면에 있다. 적분 경로를 실수축 위를 달리다가 3, 4분면을 가로지르는 반원으로 잡자. 이를 경로 II, 실수축 위를 달렸다가 1, 2 분면을 가로지르는 반원을 경로 I 로 잡자. 경로

경로 I. $\omega = Re^{i\theta}$. $d\omega = iRe^{i\theta}\,d\theta$.

$e^{-i\omega\tau} = e^{-iR\cos\theta\,\tau} + e^{R\sin\theta\,\tau}$. $R \to \infty$

$\tau < 0$ 이어야 된다고 한다. 그러니? 적분한 결과는 0., 폐곡선 이고 pole 없다.

경로 II. $\tau > 0$ 이어야 되고. 적분 결과는 $-2\pi i$ Residue$\left(\frac{1}{(\omega_+ - \omega)(\omega - \omega_-)}\right)$.

적분 결과는

$$G(\tau>0) = -2\pi i \frac{\omega_p^2}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\omega_+\tau}}{\omega_- - \omega_+} + \frac{e^{-i\omega_-\tau}}{\omega_+ - \omega_-}\right]$$

$$= -i\omega_p^2 \frac{1}{2\nu_0} e^{-\gamma\tau/2}\left(e^{i\nu_0\tau} - e^{-i\nu_0\tau}\right)$$

$$= \omega_p^2 e^{-\gamma\tau/2} \frac{1}{\nu_0}\sin\nu_0\tau$$

왜 general하게 쓰면 $G(\tau) = \omega_p^2 e^{-\gamma\tau/2}\frac{1}{\nu_0}\sin\nu_0\tau \; \Theta(\tau)$

아마 Θ가 Heviside function. 이게 있는 이유는 명확, 인과율 때문이다.
$\tau<0$ 일 때 $G(\tau)\neq 0$ 이라면, 이건 미래를 예측하거나 미래에 영향을 받는다는 뜻. 강의에서 $\tau>0$, $\tau<0$ 차이 엄청 강조하셨음
$\tau>0$ 에서 $G(\tau)$의 개형을 보면, exponential하게 감쇄하는 sin 이라는 걸 알 수 있음. exponential decay는 있는 게 직관적이다. 이 의미 대해서 엄청 강조하심. $G(0)=0$ 인 건... 왜지?

(i) Causality $G(\tau<0)=0$

과거 시점의 $\mathbb{E}$ 값만 $\mathbb{D}$를 결정하는 데에 쓰인다.

(ii)

advanced green function이 뭐지?

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_0^\infty G(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau.$$

$$\frac{\varepsilon(-\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_0^\infty G(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

$$= \left[1 + \int_0^\infty G(\tau)\, e^{i\omega^*\tau}\right]^* = \frac{\varepsilon^*(\omega^*)}{\varepsilon_0}$$

이거 왜 성립하는 거지?

$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}$ 는 upper half plane 의 ω에 대한 analytic function이다.

$\omega = x+iy$ $\quad e^{i\omega\tau} = e^{ix\tau} \cdot e^{-y\tau}$, $\tau>0$ 이면,

$e^{i\omega\tau}$가 diverge 하지 않기 위해 $y>0$ 이어야 한다.

좋은 질문) 이 response function이 있는 적분 방정식을 미분 방정식 꼴로 나타내는 게 가능한가?

Kramers kronig relation. → 함수의 실수부와 허수부 사이 관계.

$$f(\alpha) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx$$ → hand out 에 다 있다.
공부해야 한다.

$f(x)$는 x의 복소평면에서 upper plane 에서 analytic 하다.

Cauchy principal value.

$$f(x) = f_R(x) + i f_I(x)$$

$$\begin{cases} f_R(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_I(x)}{x-\alpha} dx \\ f_I(\alpha) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(x)}{x-\alpha} dx \end{cases}$$

$$Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon_0}\right]}{\omega'-\omega} d\omega'$$

$$Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right]}{\omega'-\omega} d\omega'$$

$$\begin{cases} Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\omega' Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\omega_0}\right]}{\omega'^2 - \omega^2} \\ Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon}\right] = -\frac{2}{2\pi} \omega P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon_0} - 1\right]}{\omega'^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Imaginary part가 디락델타꼴로 솟아 오른다면,
real part는

$$Re(\varepsilon(\omega)) \sim \tilde{\varepsilon}_0 + \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

로렌치안 이고, 이는 공명을 의미한다.

Imaginary 와 real 중 하나만 측정해도 된다는 뜻.