ED week 7.2.

질문) 전자기장 에서 각운동량 보존 법칙은?

이제 chapter 9로 넘어간다. 나중에 지금까지 전자기학에서 배운걸 파워포인트로 그리자

Radiating systems. → 진동하는 전하가 어떻게 빛을 만드는가?

이때 multipole expansion이 필요하다.

원점 주위에 전하가 밀집돼 있고, 원점에서 멀리 떨어진곳에서 포텐셜을 알고 싶은 상황. $\int \frac{\rho(x')}{|x-x'|} dx'$ 을 이용해 일일이 구할 수 있지만,

이를 expansion하면 monopol이 제일 dominant하고, 그 다음이 dipole momentum 이 중요함을 알 수 있다.

왜 앞서 3.4 강에서 한 multipole expansion을 이제 와서 다시 하는가?

multipole에 time depandance 를 넣으면 radiation이 나오기 때문이다.

time dependent green function은 handout 으로 공부하라.

시간에 따라 진동하는 ρ와 J.

$$\begin{cases} \rho(x,t) = \rho(x)\, e^{-i\omega t} \\ J(x,t) = J(x)\, e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

벡터 포텐셜에 대한 헬름홀츠 방정식의 해 이걸 retarded green function 이라 한다.

$$A(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx' \int dt' \frac{J(x',t')}{|x-x'|}\, \delta\left(t'-t+\frac{|x-x'|}{c}\right)$$

이거 유도법은 hand out 으로 보자.

앞으로 강의에서 프라임이 붙은 것은 source의 위치, 안 붙은 것은 observation에 관한 것.

저 $A(x,t)$에 진동하는 J를 넣자.

$c = \frac{\omega}{k}$

$k = \frac{\omega}{c}$

대입했음.

$$A(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx' \frac{J\left(x', t-\frac{|x-x'|}{c}\right)}{|x-x'|} \exp\left[-i\omega\left(t-\frac{|x-x'|}{c}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t}\int dx' \frac{J\left(x', t-\frac{|x-x'|}{c}\right)}{|x-x'|} e^{ik|x-x'|}$$

$$\begin{cases} A(x,t) = A(x)\, e^{-i\omega t} \\ A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{J(x)}{|x-x'|} e^{ik(x-x')}. \end{cases}$$

↳ 왜 이 식에는 J에 시간을 대입하지 않는 거지?

$\mathbb{H}$와 $\mathbb{E}$를 $\mathbb{A}$로부터 구할 수 있다.

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbb{A} \quad , \quad \mathbb{E} = \frac{i Z_0}{k} \nabla \times \mathbb{H} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

↳ 이게 왜 성립하지 원래는 시간 미분 항이 들어가야 할 텐데.

소스크기 (d) 소스와 관찰자 사이의 거리 r 를 radiation의 wavelength (λ)를 기준으로 분류해 보자.

소스 크기 : d , 거리 : r 파장 : λ.

near zone : $d \ll r \ll \lambda$ 소스랑 가깝고 소스가 작다.

far zone : $d \ll \lambda \ll r$ 소스랑 짱 멀다.

near zone case. $kr \ll 1$. $\exp(ikr) \sim 1$ 로 근사.

$$\mathbb{A}(\mathbb{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbb{J}(\mathbb{x}') \frac{d\mathbb{x}'}{|\mathbb{x} - \mathbb{x}'|}$$

아니 근데 왜 갑자기 시간은 고려 안 하기 시작한 거지?

와! 특수함수 쓴다.

$$\frac{1}{|\mathbb{x} - \mathbb{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

θ', ϕ'는 소스의 위치 $\mathbb{x}'$를 위한 좌표.
θ, ϕ는 관찰 위치 $\mathbb{x}$를 위한 좌표.

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \int \mathbb{J}(\mathbb{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\mathbb{x}'$$

양 변 모두 $e^{-i\omega t}$로 oscillate 한다.

far zone case $kr \gg 1$. , $|\mathbb{x}| \gg |\mathbb{x}'|$.

$$|\mathbb{x} - \mathbb{x}'| \simeq r - \hat{n} \cdot \mathbb{x}' , \quad \hat{n} = \frac{\mathbb{x}}{r} , \quad r = |\mathbb{x}|.$$

그림을 그려서 이 근사를 직관적으로 납득해 보자.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')\, e^{-ik\hat{n}\cdot\mathbf{x}'}\, d\mathbf{x}'$$

시간 까지 고려하면, $\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \propto \text{amplitude}\cdot\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}$

k에 곱해진게 $\mathbf{x}$가 아니라 r 임에 주목하라.

$\frac{1}{r}e^{ikr-i\omega t}$ 는 원형파라는 걸 이야기한다.

퍼지는 모양 자체는 구면파로 똑같은데, amplitude 를 나타내는 적분항 $\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')\, e^{-ik\hat{n}\cdot\mathbf{x}'}\, d\mathbf{x}'$ 에 의해서 각도에 따라 amplitude 가 달라지는 현상. $\hat{n}$ 과 직교하는 위치의 전류들은 서로 상쇄되어 영향이 약해짐.

$k(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')$ 가 작다면, 그러니까 소스가 파장에 비해서 작다면, exponential term 을 expand 할 수 있다.

$$\exp(-ik\hat{n}\cdot\mathbf{x}') \simeq 1 - ik\hat{n}\cdot\mathbf{x}' + \frac{1}{2!}(ik\hat{n}\cdot\mathbf{x}')^2.$$

(9.9) $$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')^n\, d\mathbf{x}'$$

~~$(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')^n$ 이 작 작~~

$(ik\hat{n}\cdot\mathbf{x}')^n$ 이 확 작아지므로, n이 작은 게 leading term 이다.

Electrice dipole field 가 있을 때 far zone 에서

9.9 식에서 $n=0$ 인 term 만 이용. (어라... $n=1$이 dipole 이어야 될 거 같은데)

(9.13) $$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}'$$

$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 를 이용,

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' = -\int \mathbf{x}'(\nabla'\cdot\mathbf{J})\, d\mathbf{x}' = -i\omega\int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}'$$

아마 부분적분. 이런 스킬도 있구나. 빼먹긴 함.

$$A(x) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \mathbb{P} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbb{P} = \int x' \rho(x')\, d^3x'$$

$\mathbb{P}$ 는 electric dipole.
회전 관성 moment랑 비슷한 정의.

$$\cancel{H = \frac{1}{\mu}\nabla\times A = \frac{ck^2}{4\pi}(\hat{n}\times\mathbb{P})}$$

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times A = \frac{ck^2}{4\pi}(\hat{n}\times\mathbb{P})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)$$

→ curl 연산할 때 stokes theorem 들어갈 것. 공부할 필요 있음.

$$\mathbb{E} = \frac{ck^2}{4\pi}\frac{iZ_0}{k}\nabla\times\left\{(\hat{n}\times\mathbb{P})\underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)}_{g(r)}\right\}$$

$$\mathbb{E} = \frac{ck^2}{4\pi}\frac{iZ_0}{k}\nabla\times(\hat{n}\times\mathbb{P})g(r)$$

$$= \frac{ik}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\mathbb{P}g(r)\cdot\nabla)\hat{n} - \mathbb{P}g(r)(\nabla\cdot\hat{n}) + \hat{n}(\nabla\cdot\mathbb{P}g(r)) - (\hat{n}\cdot\nabla)\dots\right.$$

9.18. $$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{k^2(\hat{n}\times\mathbb{P})\times\hat{n}\frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{n}(\hat{n}\cdot\mathbb{P})-\mathbb{P}]\frac{e^{ikr}}{r}(1-ikr)\right\}$$

특징들
$\mathbb{H}$ 는 $\hat{n}$과 직교. 빛의 특성과 같다.
$\mathbb{E}$ 는 $\hat{n}$과 직교한 성분도 있고 평행한 성분도 있다.

제일 dominant한 term $\frac{1}{r}e^{ikr}$ 만 쓰면,

$$\begin{cases} \mathbb{H} = \frac{ck^2}{4\pi}(\hat{n}\times\mathbb{P})\frac{1}{r}e^{ikr} \\ \mathbb{E} = Z_0\,\mathbb{H}\times\hat{n} \end{cases}$$

편광하고 관련되어있다.

질문) 이러면 $\mathbb{E}$랑 $\mathbb{P}$랑 평행하나? → 그건 아닌 듯.

average power $\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[r^2\hat{n}\cdot\mathbb{E}\times\mathbb{H}]$ $\quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2}\left(\frac{c}{\varepsilon_0}\right)|(\hat{n}\times\mathbb{P})\times\hat{n}|^2$