ED week 8-1 remaster.

Magnetic dipole / Electric quadrupole.

지지난 시간, Green function 을 사용한 정확한 vector potential의 식은

$$\mathbb{A}(\mathbb{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\mathbb{J}(\mathbb{x}')}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|} e^{ik(\mathbb{x}-\mathbb{x}')}$$

이었다. 그리고 multipole expansion 에서는.
$e^{ik(\mathbb{x}-\mathbb{x}')}$ 부분에서 $|\mathbb{x}-\mathbb{x}'| \simeq r - \hat{n}\cdot\mathbb{x}'$ 근사 후 테일러 전개했고,

$\frac{1}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}$ 는 그냥 $\frac{1}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|} \simeq \frac{1}{r}$ 로 두었다.

그러면 이렇게 multipole expansion 이 나왔자

$$\mathbb{A}(\mathbb{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x' \sum_{n=0} \frac{(-ik)^n}{n!}(\hat{n}\cdot\mathbb{x}')^n \mathbb{J}(\mathbb{x}') \quad (\text{Jackson } 9.9)$$

Jackson 에서는 여기에 만족하지 않고,
$\frac{1}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}$ 을 더 정확하게 근사한다.

$$\frac{1}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|} \simeq \frac{1}{r-\hat{n}\cdot\mathbb{x}'} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-\frac{\hat{n}\cdot\mathbb{x}'}{r}}$$

이때, $\frac{\hat{n}\cdot\mathbb{x}'}{r}$ 가 작은 값, δ 일 때, $\frac{1}{1-\delta} \simeq 1+\delta$ 의 테일러 전개.

$$\frac{1}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|} \simeq \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-\frac{\hat{n}\cdot\mathbb{x}'}{r}} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{\hat{n}\cdot\mathbb{x}'}{r}\right)$$

이걸 적용하면 더 정확한 multipole expansion이 나온다.

Jackson 9.9 식에서 $\frac{1}{r}$ 대신 $\frac{1}{r}\left(1+\frac{\hat{n}\cdot\mathbb{x}'}{r}\right)$ 을 대입.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(1+\frac{\hat{n}\cdot\mathbf{x}'}{r}\right)\right]\int d^3x' \sum_{n=0} \frac{(-ik)^n}{n!}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')^n \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

이제부터 시작이다. $(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')$에 대해 1차인 부분을 모아준다.

Jackson (9.30) $$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r}-ik\right)\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\,d^3x'$$

이제 적분 내부항 $\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')$에서, $\mathbf{x}'$와 $\mathbf{J}$의 순서에 대해 대칭인 항과 비대칭인 항을 분리한다.

$$\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}') = \frac{1}{2}\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}') + \frac{1}{2}\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}') + \left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{J}) - \frac{1}{2}\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{J})\right\}$$

대칭인 항: $\frac{1}{2}\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}') + \frac{1}{2}\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{J})$

비대칭인 항: $\frac{1}{2}\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}') - \frac{1}{2}\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{J})$

비대칭인 항은 $\mathbf{J}$와 $\mathbf{x}'$의 위치를 바꾸면 부호가 바뀜을 알 수 있다.
비대칭 항을 보다 보면, BAC - CAB 공식을 쓸 수 있음을 깨닫는다.

$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ 에서, $\mathbf{J}$가 $\mathbf{B}$, $\hat{n}$이 $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}'$가 $\mathbf{C}$.

$$\frac{1}{2}\mathbf{J}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}') - \frac{1}{2}\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{J}) = \frac{1}{2}\hat{n}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{x}') = \frac{1}{2}(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})\times\hat{n}$$

우리는 magnetization은 $\mathcal{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})$라고 정의한다.
그리고 magnetic dipole moment는 magnetization을 적분한 값이다.

$$\mathbf{m} = \int \mathcal{M}\,d^3x' = \frac{1}{2}\int(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})\,d^3x'$$

식 9.30에서 비대칭 항을 분리한 것이 "magnetic dipole moment"의 기여.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{-ik\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int \frac{1}{2}(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})\times\hat{n}\,d^3x'$$

$$= \frac{-ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\left[\int\frac{1}{2}(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})\,d^3x'\right]\times\hat{n}$$

ED week 8-1 remaster.

$\mathbb{m} \times \hat{n}$ 을 순서를 뒤집고 부호를 정리하면,

Jackson 9.33 $\mathbb{A}_{m\text{-}di} = \dfrac{ik\mu_0}{4\pi} (\hat{n} \times \mathbb{m}) \dfrac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \dfrac{1}{ikr}\right)$

어라? 이 식의 형태를 본 것만 같다.

Electric dipole 에서 자기장이 이렇게 생겼었다.

$$\mathbb{H}_{e\text{-}di} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{n} \times \mathbb{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right)$$

이어서, magnetic dipole 에서 H-field 는 electric dipole 에서 E-field 와 닮았다. 왜냐면,

$\mathbb{A}_{m\text{-}di}$ 와 $\mathbb{H}_{e\text{-}di}$ 가 닮음,

$$\mathbb{H}_{m\text{-}di} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbb{A}_{m\text{-}di} \quad , \quad \mathbb{E}_{e\text{-}di} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbb{H}_{e\text{-}di}$$

이기 때문, 따라서,

Jackson 9.35 $\mathbb{H}_{m\text{-}di} = \dfrac{1}{4\pi} \left\{ k^2 (\hat{n} \times \mathbb{m}) \times \hat{n} \dfrac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbb{m}) - \mathbb{m}] \left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}$

그리고 $\mathbb{E}_{m\text{-}di}$ 와 $H_{e\text{-}di}$ 가 닮았다.

왜냐면! $H_{m\text{-}did}$ 에서 $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ 이 있는 term만 떼서보면,

$$\mathbb{H}_{m\text{-}di} = \frac{k^2}{4\pi} (\hat{n} \times \mathbb{m}) \times \hat{n} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbb{A}_{e\text{-}di} = -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} \mathbb{P} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

$\mathbb{H}_{m\text{-}di}$ 와 $\mathbb{A}_{e\text{-}di}$ 가 닮았으며,

$$\mathbb{E}_{m\text{-}di} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbb{H}_{m\text{-}di} \qquad H_{e\text{-}di} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbb{A}_{e\text{-}di}$$

이기 때문이다.

따라서, $\mathbb{H}_{e-di}$ 가 $\frac{ck^2}{4\pi}(\hat{n}\times\mathbb{p})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)$ 이니까,

계수를 맞춰주고 $\mathbb{p}$ 자리에 ~~$(\hat{n}\times\mathbb{m})$ 을 넣어준다면,~~
$(\hat{n}\times\mathbb{m})\times\hat{n}$ 을 넣어준다면,

$$\mathbb{E}_{m-di} = -\frac{Z_0}{4\pi}k^2\left[\hat{n}\times\left(\{\hat{n}\times\mathbb{m}\}\times\hat{n}\right)\right]\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)$$

이때, $\hat{n}\times\{(\hat{n}\times\mathbb{m})\times\hat{n}\} = (\hat{n}\times\mathbb{m})(\hat{n}\cdot\hat{n}) - \hat{n}\{(\hat{n}\times\mathbb{m})\cdot\hat{n}\}$
$= \hat{n}\times\mathbb{m} - 0$

을 대입!

Jackson 9.36 $\quad \mathbb{E}_{m-di} = -\frac{Z_0}{4\pi}k^2(\hat{n}\times\mathbb{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)$.

하... 교수님도, 교과서도, 이렇게 자세히 유도법을 알려준 적이 없다.

깔끔하게 정리, 비교 표. Glia, 적절히 식을 채워줘.

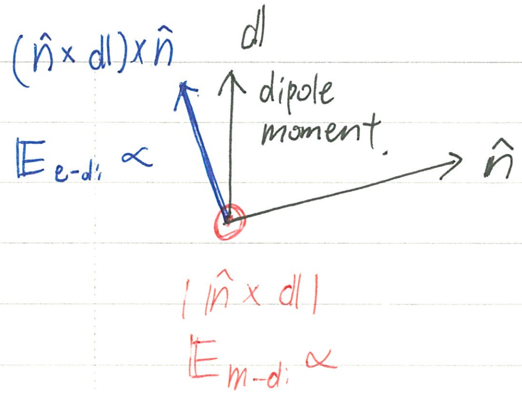
유도 단계.
$\mathbb{A} \searrow \mathbb{H} \searrow \mathbb{E}$

Electric dipole moment radiation	Magnetic dipole moment radiation
$\mathbb{H} =$	$\mathbb{A} =$
$\mathbb{E} =$	$\mathbb{H} =$
$\mathbb{A} =$	$\mathbb{H} \simeq$
$\mathbb{H} =$	$\mathbb{E} =$

$\mathbb{p}$ 를 $\frac{1}{c}\mathbb{m}$ 으로 바꿔주는 게 핵심.

이제 양쪽 케이스에서 $\mathbb{H}$ 와 $\mathbb{E}$ 의 방향에 집중

Electric dipole moment	Magnetic dipole moment.	설명
$\mathbb{H}$: $\hat{n}\times\mathbb{p}$	$\mathbb{E}$: $\hat{n}\times\mathbb{m}$	$\hat{n}$, 진행 방향과 직교.
$\mathbb{E}$: $(\hat{n}\times\mathbb{p})\times\hat{n}$, $3\hat{n}(\hat{n}\cdot\mathbb{p})-\mathbb{p}$	$\mathbb{H}$: $(\hat{n}\times\mathbb{m})\times\hat{n}$, $3\hat{n}(\hat{n}\cdot\mathbb{m})-\mathbb{m}$	dipole moment 가 $\hat{n}$ 과 수직한 성분의 방향.



강조) E-d 와 m-d 의 편광 방향.

E-d: 전기장이 dipole moment 와 $\hat{n}$ 으로 정의된 면 위에 놓임. 파란색 벡터

M-d: 전기장이 dipole moment 와 $\hat{n}$ 으로 정의된 면에 수직. 빨간 벡터.

그러나 공통점이 있으니, magnetic dipole moment 에서도

$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto k^4$ 이다.

맨 처음에 버려뒀던 $(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{J}$ 의 symmetric part를 보자.
이건 Electric quadrupole 의 기여이다.

$\frac{1}{2}\int\left[(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{J} + (\hat{n}\cdot\mathbf{J})\mathbf{x}'\right]d^3x'$ 를 계산해 보자.
Electric dipole 에서 했던 것 같이, $\nabla\cdot\mathbf{J} = i\omega\rho$ 를 이용.

아래 풀이가 무슨 논리인지 지금은 모르겠다! 잘못 쓴 부분도 있을 수 있다!

$$\begin{aligned}\partial_k(x_i x_j J_k) &= \delta_{ik}x_j J_k + \delta_{jk}x_i J_k + x_i x_j \partial_k J_k \\ &= x_j J_i + x_i J_j + x_i x_j(\nabla\cdot\mathbf{J}) \\ &= x_j J_i + x_i J_j + i\omega x_i x_j \rho\end{aligned}$$

$$\therefore \int d^3x'\,(x_j' J_i + x_i' J_j) = -i\omega\int d^3x'\, x_i' x_j' \rho(\mathbf{x}')$$

여기까지는 인정! 그런데,

$$\frac{1}{2}\int\left[(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{J} + (\hat{n}\cdot\mathbf{J})\mathbf{x}'\right]d^3x' = -\frac{i\omega}{2}\int \mathbf{x}'(\mathbf{x}'\cdot\hat{n})\rho(\mathbf{x}')\,d^3x'$$

이건 어찌 유도된 걸까? 양 변의 홀 벡터가 i index라 치고, $\hat{n}$을 이용해 j index를 합했나?

이 적분을 식 9.30 에 넣어 정리

Jackson 9.38 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int \mathbf{x}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x$

이제 $\nabla\times$ 연산 대신에 $ik\hat{n}\times$ 연산을 한다.

왜지? 일단 $\nabla = \hat{n}\frac{\partial}{\partial r}$ 인 건 알겠다.

그러면 $\frac{\partial}{\partial r} = ik$ 라고 둔 것인가? 무슨 근거로?

Jackson 9.39
$$\begin{cases} \mathbf{H} = ik\,\hat{n}\times\mathbf{A}/\mu_0 \\ \mathbf{E} = ikZ_0\,(\hat{n}\times\mathbf{A})\times\hat{n}/\mu_0 \end{cases}$$

H-field 가 이렇게 되는 건 쉽게 계산할 수 있다.

Jackson 9.40 $\mathbf{H} = -\frac{ick^3}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int(\hat{n}\times\mathbf{x}')(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x'$

이제 quadrupole moment tensor 를 유도할 것이다.

이 내용 아주 중요할 거 같다! 왜냐면 교수님이 중요하다고 했으니까.

적분 항을 계산하자.

$$\int(\hat{n}\times\mathbf{x}')(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x' = \hat{n}\times\left[\int\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x'\right]$$

$$\left[\hat{n}\times\left\{\int\mathbf{x}'(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x'\right\}\right]_i = \varepsilon_{ijk}\hat{n}_j\left[\int\underbrace{\mathbf{x}'}_{\text{k-index 를 결정하는 건 이것뿐.}}(\hat{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x'\right]_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\hat{n}_j\int x'_k\,\hat{n}_l\,x'_l\,\rho(\mathbf{x}')d^3x'$$

$$= \varepsilon_{ijk}\hat{n}_j\hat{n}_l\int x'_k x'_l\,\rho(\mathbf{x}')d^3x'$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{1}{3}\hat{n}_j\hat{n}_l\int\underbrace{3x'_k x'_l\,\rho(\mathbf{x}')d^3x'}_{\text{이게 quadrupole moment의 일부로.}}$$

$$= \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \cdot \frac{1}{3} \hat{n}_l \int \left[3x'_k x'_l - x'^2 \delta_{lk} + x'^2 \delta_{lk} \right] \rho(x') d^3x'$$

이게 quadrupole moment 다!

$$Q_{kl} = \int \rho(x') \left[3x'_k x'_l - x'^2 \delta_{lk} \right] d^3x'$$

k와 l이 같으면 어찌 되나? 예시 삼아 Q_{xx}

$$Q_{xx} = \int \rho(x') \left[3x'_x x'_x - (x'^2_x + x'^2_y + x'^2_z) \right] d^3x'$$

$$= \int \rho(x') \left[2x'^2_x - x'^2_y - x'^2_z \right] d^3x'$$

$Q_k = Q_{k\alpha} n_\alpha$ 라고 정의한다. 텐서를 축약해서 벡터로 만든다.
지금까지 보던 식에 정의들을 대입하면,

$$\left[\hat{n} \times \left\{ \int x' (\hat{n} \cdot x') \rho(x') d^3x' \right\} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \cdot \frac{1}{3} \hat{n}_l Q_{kl} + \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \cdot \frac{1}{3} \hat{n}_l \int x'^2 \delta_{lk} \rho(x') d^3x'$$

$$= \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \cdot \frac{1}{3} Q_k + \varepsilon_{ijk} \underbrace{\hat{n}_j \cdot \frac{1}{3} \hat{n}_k}_{\text{0 이 된다!}} \int x'^2 \rho(x') d^3x'$$

결국, $\hat{n} \times \left\{ \int x' (\hat{n} \cdot x') \rho(x') d^3x' \right\} = \frac{1}{3} \hat{n} \times Q$

와! 깔끔!

Jackson 9.44 $\quad \mathbb{H} = -\frac{ick^3}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \times Q(\hat{n})$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{-k^3}{24\pi} \right)^2 \cdot c^2 Z_0 \left| [\hat{n} \times Q(\hat{n})] \times \hat{n} \right|^2$$

$\frac{dP}{d\Omega} \propto k^6$ 임에 주목! dipole과 다름!