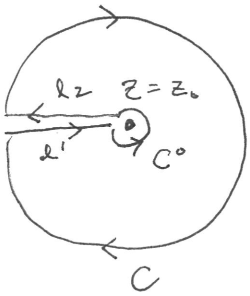
Cauch Integral formula.

어떤 복소함수 $F(z)$ 가 $z=z_0$ 에서 single pole 을 가진다면,
이 지점에서 F 는 analytic 하지 않으므로, z_0 를 내부에 포함한
폐경로의 선적분 값은 0이 아니다. 그럼 무슨 값일까?
모든 z에 대해 analytic 한 함수 $f(z)$ 를 이용하여, $F(z)$ 를 다음과
같이 나타낼 수 있다.

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$$

이제, $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ 를 구하는 꼼수를 찾아보자.

요점은, $z=z_0$ 만 피하면 F는 analytic 하므로, 폐경로의
적분값이 0 이라는 점이다. ~~전체 적분 경로 C는 그림과 같이~~
~~C_1, l_1, C_2, l_2 로 쪼갤 수 있다.~~



single pole 은 피하는 적분경로를
C' 이라고 부르자. 그림과 같이,
C'은 C와 l', l^2, C° 로 이루어져 있다.

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{l_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \oint_{C^\circ} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{l_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

이때, l_1과 l_2는 방향만 다른 동일한 경로이므로, 둘의 적분 결과는
서로 상쇄된다. $\int_{l_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = -\int_{l_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$

결국, $\oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$ 이라는 점에 의해,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = -\oint_{C^\circ} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

아직 C° 가 무엇인지 가정하지 않았다. 이것을 적분하기 간편한
경로로 설정하여 값을 구하면 된다. 단, 방향이 시계 방향이어야 한다는 점에 유의

C가 반시계 방향의 경로라면, C^0는 그 반대 방향으로 돌아야 한다.

C^0를 $z=z_0$를 중심으로 두고, 반지름이 ε인 원형으로 둘 수 있다.

적분 경로 위 점이 z 일때, 이것을 반지름 ε와 원형 경로 위 각도 θ로 나타낸다.

$$z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}, \qquad dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta.$$

경로가 시계 방향이므로, θ는 π에서 시작해 $-\pi$로 끝난다.

$\varepsilon \to 0$의 극한으로 보내어 적분을 계산하면,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{C^0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\, i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{(z_0+\varepsilon e^{i\theta}) - z_0}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} i \int_{\pi}^{-\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

$$= i f(z_0) \int_{\pi}^{-\pi} d\theta$$

$$= -2\pi i f(z_0)$$

결론!

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = -\oint_{C^0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

괄목할 점은, 내부에 single pole를 똑같이 포함하고만 있다면,
폐경로가 어떻게 생겼든 적분값이 같다는 점이다.