wave equation 을 위한 Green's function.

A 와 ϕ 에 대한 맥스웰 방정식이 어떻게 생겼는지 상기해 보자.

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} A - \nabla\left(\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J \end{cases}$$

Lorentz gauge $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ 을 사용.

ϕ 와 A 에 대해, 독립적인 wave equation 이 나온다.

가끔, wave equation 에 나오는 연산자 $\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$ 를 이렇게 하나의 연산자 기호 $\Box$ 네모로 쓰기도 한다. 세모에 이어 네모라니, 뇌절이다.

이때, v 는 phase velocity, 여기서는 $v = c$, 광속이다.

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \Box\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A = \Box A = -\mu_0 J \end{cases}$$

양 변을 시간 공간에서 진동수 공간으로 변환해 주는 푸리에 변환을 하면, 귀찮은 시간 미분항이 파수가 된다. $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xrightarrow{FT} k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ 물리적 차원은 양쪽이 같다.

이러면 방정식이 오로지 공간에 대한 문제가 되면서 풀이가 간편해 진다.

파동 방정식 일반식,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = -4\pi f(x,t)$$ 에 대해,

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)$ 항만 푸리에 변환 해보자. 부분 적분을 두 번 연속 적용.

$$\frac{\partial^2}{\partial t}\psi \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \exp(i\omega t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \cancel{\left[\exp(i\omega t)\frac{\partial}{\partial t}\psi\right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, i\omega \exp(i\omega t)\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

$$= -\cancel{\left[i\omega \exp(i\omega t)\psi\right]_{-\infty}^{\infty}} + \int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^2 \exp(i\omega t)\psi\, dt.$$

$$= -\omega^2 \tilde{\psi}(x,\omega).$$

따라서 기존의 파동방정식은,

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\psi}(x,\omega) = -4\pi \tilde{f}(x,\omega)$$

우리는 이걸 헬름홀츠 방정식이라고 부르기로 했다.

이제 이 방정식의 Green function 을 찾아보자.

Green's function 은 $\tilde{f}(x,\omega) = \delta(x - x')$ 로 두었을 때 solution 이다

$$(\nabla^2 + k^2)\, \tilde{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

즉, 각각에 k에 대한 solution $\tilde{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$를 찾는 것이다. k를 상수 취급.

$\mathbb{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\mathbb{R}$이 소스와 관찰자 사이 변위 벡터일 때,

$$\nabla^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2} R.$$ → 왜 이렇게 되는 건지는 모르겠다!

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(R\tilde{G}_k\right) + k^2 \tilde{G}_k = -4\pi\, \delta(\mathbb{R})$$

$R \neq 0$ 일 때, 우변은 0이다.

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(R\tilde{G}_k\right) + k^2\left(R\tilde{G}_k\right) = 0 \longrightarrow R G_k(R) = A e^{ikR} + B e^{-ikR}$$

$$\therefore \tilde{G}_k(R) = A \cdot \frac{1}{R} e^{ikR} + B \frac{1}{R} e^{-ikR}, \quad A + B = 1.$$

$$\lim_{kR \to 0} \tilde{G}_k(R) = \frac{1}{R}$$

$$\tilde{G}_k^{(\pm)}(R) = \frac{1}{R} e^{\pm ikR}$$ 이라고 쓰자.

헬름홀츠 방정식의 양 변에 $e^{i\omega t'}$를 곱해준다 → 왜 이렇게 하는 건지 논리를 이해 못하겠다!

$$(\nabla^2 + k^2)\, \tilde{G}_k^{(\pm)} e^{i\omega t'} = -4\pi\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, e^{i\omega t'}$$

이걸 다시 ω-space 에서 t-space로 역푸리에 변환.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \delta(t - t')$$

이때, $G^{(\pm)}$는 $\tilde{G}_k^{(\pm)} e^{i\omega t'}$의 역푸리에 변환이다. $\tau = t - t'$ 일 때,

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{R} e^{\pm ikR} \cdot e^{i\omega t'} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{R} e^{\pm ikR}\, e^{-i\omega(t - t')}$$

$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$
$k = \frac{\omega}{c}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{R} \exp\left[i\omega\left(-\tau \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right]$$

상수를 푸리에 변환하면 exponential 내부를 0으로 만드는 조건으로 디랙델타가 나옴을 알고 있다.

$$\therefore G^{(\pm)}(R,\tau) = \frac{1}{R}\delta(\tau \mp R/c)$$

$$G^{(\pm)}(x,t;x',t') = \frac{1}{|x'-x|}\delta\left(t-t' \mp \frac{|x-x'|}{c}\right) \qquad \left(t-t' = \pm\frac{|x-x'|}{c}\right)$$

이때, $\frac{|x-x'|}{c} \geq 0$ 이므로, G^+ 인 경우 $t-t' > 0$ 이고,
G^- 인 경우 $t-t' < 0$ 일 때

디랙델타가 무한대가 되는 지점이 있다.

$t-t'$는 소스에서 신호가 나오는 시간과 관찰자가 감지하는 시간까지 지연을 나타낸다. 인과율을 생각하면, $t-t' > 0$ 인 게 자연스럽다.
$t-t' < 0$ 이면 이건 미래를 예견한 것이다.
따라서 G^+와 G^-는 다른 별명을 가지고 있다.

G^+ : retarded green function.

(x,t) 에서 일어난 관찰은 앞선시간 $t' = t - \frac{|x-x'|}{c}$ 에서 일어나고 $|x-x'|$ 만큼 떨어진 거리에 일어난 신호를 감지한 것이다.

G^- : advanced Green function.

Green function을 이용하여 general solution $\psi^{(\pm)}(x,t)$ 를 구하면 이렇다.

$$\psi^{(\pm)}(x,t) = \iint dx'\,dt'\, G^{\pm}(x,t;x',t')\, f(x',t')$$

advanced green's function 만 사용할 경우,

$$\psi(x,t) = \iint dx'\,dt' \frac{1}{|x'-x|}\delta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right) f(x',t') \qquad t' = t - \frac{|x-x'|}{c}$$

$$\psi(x,t) = \iint dx' \frac{f\left(x', t-\frac{|x-x'|}{c}\right)}{|x'-x|}$$