여기서 x 와 x_{n-1} 의 차이, 즉 이동거리 ξ 를 두고 적분해보자. 가우시안 적분이다.

$\xi = x - x_{n-1}$

$$\langle x, t+\Delta t \mid x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \exp\left(\frac{i m \xi^2}{2\hbar \Delta t} - \frac{i V \Delta t}{\hbar}\right) \langle x-\xi, t \mid x_1, t_1 \rangle$$

ξ^2 에 주목. 가우시안 분포이며, variance는 Δt 에 비례한다.

$\Delta t \to 0$ 의 극한으로 보내면, $\xi = 0$ 인근에서 적분 결과가 중요해진다.

0에 가까운 ξ 와 Δt 에 대해 테일러 전개를 취한다.

※ 여러 term 에 대해 진행한다. 복잡하다. 그런데 중요하다. 잘 알아야 함!

첫번째) $\langle x, t+\Delta t \mid x_1, t_1 \rangle \simeq \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle$

두번째) $\exp\left(-\frac{i V \Delta t}{\hbar}\right) \simeq 1 - \frac{i V \Delta t}{\hbar}$.

세번째) $\langle x-\xi, t \mid x_1, t_1 \rangle \simeq \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle - \xi \frac{\partial}{\partial x} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle$

$$+ \frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle.$$

세번째 근사에서, $\frac{\partial}{\partial \xi}$ 가 아니라 $\frac{\partial}{\partial x}$ 임에 유의하라! 정말로!

세번째에서 ξ 에 대한 일차항은 없어도 된다. 가우시안 함수가 even function 이라서 적분하면 0이 되어버린다. 그래서 다시 쓰면,

세번째) $\langle x-\xi, t \mid x_1, t_1 \rangle \simeq \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle$

각 근사들이 슈뢰딩거 방정식과 어떻게 연관되는지 보인다.

첫번째는 $\frac{\partial}{\partial t}\psi$ 와, 두번째는 $V\psi$ 와, 세번째는 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi$ 와 연결된다.

근사들을 대입하면,

$$\langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \exp\left(\frac{i m \xi^2}{2\hbar \Delta t}\right) \left[1 - \frac{i}{\hbar} V \Delta t\right]$$
$$\left[\langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle\right]$$

적분항에서 $\left[1 - \frac{i}{\hbar} V \Delta t\right]$ 는 밖으로 나온다. 적분만 계산하면,

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \exp\left(\frac{i m \xi^2}{2\hbar \Delta t}\right) \left[\langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle\right]$$
$$= \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \sqrt{2\pi} \left(\frac{i \hbar \Delta t}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle$$

첫번째 것은 Δt에 대해 0차, 두번째 것은 Δt에 대해 1차이다.

양 변에서 $\langle x, t | x_1, t_1 \rangle$을 뺄 수 있으며, Δt에 대한 1차항만 남기자!

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t}\langle x, t | x_1, t_1 \rangle = -\frac{i}{\hbar}\Delta t\, V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \frac{i\hbar\Delta t}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x, t | x_1, t_1 \rangle.$$

정리하면 정말로 슈뢰딩거 방정식이 나온다, Δt를 나누고 양 변에 $i\hbar$를 곱한다.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x, t | x_1, t_1 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x, t | x_1, t_1 \rangle + V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle$$