QM week 10 -1.

어떤 operator A에 대해

$\{\pi, A\} = 0$ 이면 A는 parity에 odd

$[\pi, A] = 0$ 이면 even.

⟨parity selection rule⟩

2개의 parity eigen state $|\alpha\rangle$와 $|\beta\rangle$가 있다.

$\pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle$ $\quad \pi|\beta\rangle = \varepsilon_\beta|\beta\rangle$, $\quad \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta = \pm 1.$

$\langle\beta|x|\alpha\rangle = 0$ 이다. $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$ 가 아닌 이상!

왜? $-x = \pi x \pi$, $\langle\beta|x|\alpha\rangle = -\langle\beta|\pi x \pi|\alpha\rangle = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\beta|x|\alpha\rangle$

$-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = +1$ 이 아닌 이상, $\langle\beta|x|\alpha\rangle = 0.$

또 다른 descrete symmetry로 넘어가자.

lattice translator.

periodic potential. $\quad V(x \pm a) = V(x).$

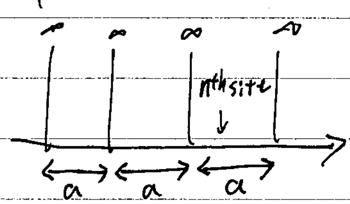
이러면 당연히 해밀토니안도 periodic, lattice translation에 invarient 해진다.

$\tau^\dagger(a)\,\mathcal{H}\,\tau(a) = \mathcal{H}, \quad \tau^\dagger(a)\,\tau(a) = \mathbb{1}.$

$\tau(a)$는 hermitian 이 아니다.

질문, $\tau(a)$랑 그냥 position translation을 a만큼 하는 거랑 연산자가 무슨 차이인 거지?

예시) periodic diracdelta potential.



ground state) 우물 한 곳에 완전히 자리잡은 상태.

○ n번째 구멍에 있는 상태, $|n\rangle$

$H|n\rangle = E_0|n\rangle.$ 모든 $|n\rangle$에 대해 에너지가 같다.

$|n\rangle$ 은 $\tau(a)$ 에 대해 eigenstate 가 아니다.

$$\tau(a)|n\rangle = |n+1\rangle$$

이건 degeneracy 때문에 가능한 일

simultaneous eigenstate of $\mathcal{H}$, $\tau(a)$

→ 아마 모든 localized state의 선형 결합일 것.

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n\rangle, \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

$$\mathcal{H}|\theta\rangle = \cancel{E_0|n\rangle} \left(\sum_n e^{in\theta}\right) E_0|n\rangle = E_0|n\rangle.$$

$$\tau(a)|\theta\rangle = \cancel{\sum_n e^{i(n+1)\theta}} \sum_n e^{i\theta n}|n+1\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle$$

오호.

두 번째 케이스) 포텐셜이 유한할 때.

$\langle n'|H|n\rangle \neq 0$ when $n' \neq n$.

다른 구멍으로 넘어갈 확률이 있다.

$\langle n'|H|n\rangle \neq 0$ only if $n' = n$ or $n' = \pm 1 + n$.

→ 왜 이렇게 자신있게 말하는거지? 시간이 지나면 열몇자리로 갈 수도 있지 않나? → 슈뢰딩거 관점이라 그런가?

$\langle n\pm 1|\mathcal{H}|n\rangle = -\Delta$ 왜 − 부호를 쓰는 것이 conversion이지?

$$\mathcal{H}|n\rangle = E_0|n\rangle - \Delta|n+1\rangle - \Delta|n-1\rangle$$

그럼 $|n\rangle$ 은 더 이상 $\mathcal{H}$ eigenstate가 아님.

그럼 $|\theta\rangle$ 는 eigen state 인가?

$$\mathcal{H}|\theta\rangle = E_0\sum e^{in\theta}|n\rangle - \Delta\sum_{n'=n+1} e^{i\theta n}|n+1\rangle - \Delta\sum_{n''=n-1} e^{i\theta n}|n-1\rangle$$

$$= \left(E_0 - \Delta e^{i\theta} - \Delta e^{-i\theta}\right)\sum e^{in\theta}|n\rangle$$

$$= (E_0 - 2\delta\cos\theta)|\theta\rangle.$$

$|\theta\rangle$ 의 energy eigenvalue는 θ 에 depend.

Δ 는 에너지 밴드의 폭을 결정한다.

질문) 열 몇자리, 혹은 저 먼 이웃까지 넘어갈 수 있는 해밀토니안이면?

Physical meaning of θ.

$$\langle x'|\theta\rangle \xrightarrow{\tau(a)} \langle x'|\tau(a)\theta\rangle = e^{-i\theta}\langle x'|\theta\rangle = \langle x-a|\theta\rangle$$

$$\psi(x'-a) = e^{-i\theta}\psi(x')$$

$B =$

ansatz: $\psi_\theta(x') = e^{ikx'} u_k(x')$. with $ka = \theta$.

즉, k는 파수.

~~ut~~ $u_k(x' \pm a) = u_k(x')$ u_k는 a 간격에 periodic 한 함수.

$$e^{ik(x'-a)} u_k(x'-a) = e^{-ika}\left(e^{ikx'} u_k(x')\right).$$

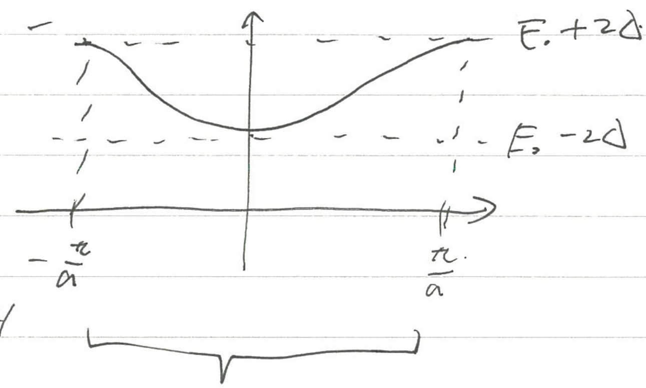
$$\cancel{\psi_\theta(x') = e^{ik}}$$

$$\psi_\theta(x'-a) = e^{-i\theta}\psi_\theta(x').$$

아! 이게. Bloch's theorem 이구나.

Bloch sphere 랑 같은 사람인가?

$$E = E_0 - 2\Delta\cos(ka)$$



1st Brillouin zone.

k는 바로 momentum 이다!

왜? 아니다!

$\psi_k(x')$ 는 momentum operator의 eigenstate 가 아님.

$$\hat{p}\,\psi_k(x') = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ikx'} u_k(x')\right)$$

$$= +k\hbar\, e^{ikx'} u_k(x') + e^{ikx'}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} u_k(x')\right)$$

k conserved up to modulo G, (a reciprocal lattice vector).

$\hbar k$: crystal momentum. (quasi-momentum).

세번째 descrete symmetry, time reversal.

고전역학) 시간의 역방향으로 돌아가는 궤적도 운동방정식의 해다.

$$\begin{cases} x \xrightarrow{\tau} x \\ p \xrightarrow{\tau} -p \end{cases}$$

time reversal 은 위상공간에서 mapping 이다.

case 1) 힘이 속도의 짝수 멱법칙을 따르면, time reversal symmetry를 지킨다.

열역학!

B가 time reversal에 odd 라서 ? 안..

(case 2) 힘이 속도의 홀수 멱법칙을 따르면,

time reversal symmetry 가 깨진다. 예) 마찰력.

영구자석의 스핀도 time reversall odd 라고함. 자기장 속에서 로렌츠 힘 ? → 어? 전기장 속에서.

슈방도 time reversal symmetry 를 가진다

왜 $i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \mathcal{H}\psi(t)$ $\quad$ $-i\hbar \frac{\partial \psi(-t)}{\partial t} = \mathcal{H}\psi(-t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*(-t)}{\partial t} = \mathcal{H}\psi^*(-t)$$

(complex conjugate 를 취해서 time reverse)