

QM 11th week -1 (THU)

Time reversal 이외에 다른 antiunitary symmetry가 있나? → 없다! 신기한 부분이다.

질문: $(H)^{\dagger}$ 를 정의할 수가 있나???, 없다면 왜 안되는가?

3장으로 잠깐 돌아가자. Rotation이란 뭐고, 상응하는 unitary operator는 뭔가?

Position translation과 달리, rotation은 서로 직교하는 방향에 대한 변환끼리 commute하지 않는다 → non-Abelian

Infinitesimal rotation: 아주 작은 각 ϵ 만큼 돌려보자

$$U_{\epsilon} = 1 - i G \epsilon. \quad G: \text{generator of rotation angular momentum.}$$

We define general angular momentum $\vec{J}$ to be generator

such that
$$D(\hat{n}, \epsilon) = 1 - i \frac{1}{\hbar} \vec{J} \cdot \hat{n} \epsilon$$

$D(\hat{n}, \epsilon)$ 은 $\hat{n}$ 을 회전축 삼아서 ϵ 만큼 돌리는 general rotation operator

Finite rotation: infinitesimal rotation을 여러번 한다.

$$D(\hat{n}, \phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{i}{\hbar} (\vec{J} \cdot \hat{n}) \frac{\phi}{N} \right]^N = \exp \left(-i \frac{1}{\hbar} (\vec{J} \cdot \hat{n}) \phi \right)$$

Rotation R in E_3 (유클리드 3차원 공간)

Example) $R_3 = R_2 R_1$, $D(R_3) = D(R_2 R_1) = D(R_2) D(R_1)$

Rotation matrix와 rotation operator는 commute하지 않는다.

For infinitesimal rotation in Euclidean space

$$R_z(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon & 0 \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\epsilon) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix} \quad R_y(\epsilon) \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix}$$

$[R_x(\epsilon), R_y(\epsilon)]$ 를 계산해 보자

$$R_x(\epsilon) R_y(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 & \epsilon \\ \epsilon^2 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon \\ -\epsilon & \epsilon & 1 - \epsilon^2 \end{pmatrix} \quad R_y(\epsilon) R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & \epsilon^2 & \epsilon \\ 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon \\ -\epsilon & \epsilon & 1 - \epsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\epsilon) R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon) R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1} \quad (3\text{차 항 이상은 무시})$$

$$\therefore [R_x(\epsilon), R_y(\epsilon)] = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1}$$

$D(x, \phi)$, $D(y, \phi)$, $D(z, \phi)$ 도 마찬가지로의 관계식을 따라야 한다.

$$D(x, \phi) \simeq \mathbb{1} - i \frac{\phi}{\hbar} J_x - \frac{\phi^2}{2\hbar^2} J_x^2$$

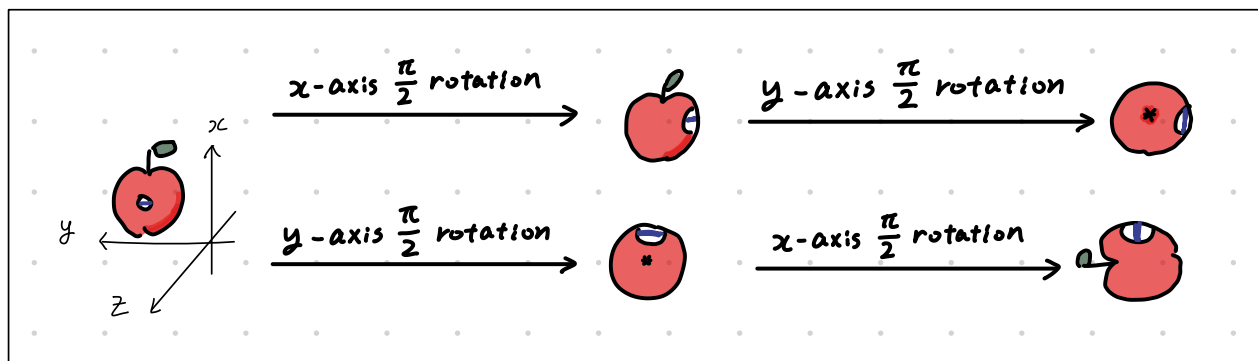
$$\begin{aligned} [D(x, \phi), D(y, \phi)] &= \left(\mathbb{1} - i \frac{\phi}{\hbar} J_x - \frac{\phi^2}{2\hbar^2} J_x^2 \right) \left(\mathbb{1} - i \frac{\phi}{\hbar} J_y - \frac{\phi^2}{2\hbar^2} J_y^2 \right) \\ &\quad - \left(\mathbb{1} - i \frac{\phi}{\hbar} J_y - \frac{\phi^2}{2\hbar^2} J_y^2 \right) \left(\mathbb{1} - i \frac{\phi}{\hbar} J_x - \frac{\phi^2}{2\hbar^2} J_x^2 \right) \\ &= \mathbb{1} - \frac{\phi^2}{\hbar^2} [J_x, J_y] - \mathbb{1} \simeq D(z, \phi^2) - \mathbb{1} = -i \frac{\phi^2}{\hbar} J_z \end{aligned}$$

위 식에서 angular momentum operator의 commutation relation이 나온다.

$$\therefore [J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

General formula $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$

Generator 들이 commute 하지 않는다 $\rightarrow$ Non-Abelian



consistency check: finite rotation

Expectation value 가 고전적인 변환과 똑같이 변환되는가?

3차원 유클리드 공간의 일반적인 벡터 $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

z 축을 회전축 삼아 ϕ 만큼 돌리기

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \cos\phi - V_y \sin\phi \\ V_x \sin\phi + V_y \cos\phi \\ V_z \end{pmatrix}$$

그러면, J_x, J_y, J_z 의 expectation value도 위 변환을 따른 것인가?

$$\langle J_x \rangle' = \langle J_x \rangle \cos\phi - \langle J_y \rangle \sin\phi$$

$$\langle J_y \rangle' = \langle J_x \rangle \sin\phi + \langle J_y \rangle \cos\phi$$

$$\langle J_z \rangle' = \langle J_z \rangle$$

Baker hausdorff formula

$$\exp(i\lambda G) A \exp(-i\lambda G)$$

$$= A + \frac{i\lambda}{1!} [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!} [G, [G, [G, A]]]$$

$$\langle J_x \rangle' = \langle 2' | J_x | 2' \rangle$$

$$= \langle 2 | D_z^\dagger(\phi) J_x D_z(\phi) | 2 \rangle$$

$$= \langle 2 | \exp(i \frac{\phi}{\hbar} J_z) J_x \exp(-i \frac{\phi}{\hbar} J_z) | 2 \rangle$$

$$= \langle 2 | J_x + \underbrace{i \frac{\phi}{\hbar} [J_z, J_x]}_{i\hbar J_y} + \frac{1}{2!} \underbrace{(i \frac{\phi}{\hbar})^2 [J_z, [J_z, J_x]]}_{-(i\hbar)^2 J_x} + \frac{1}{3!} \underbrace{(i \frac{\phi}{\hbar})^3 [J_z, [J_z, [J_z, J_x]]]}_{-(i\hbar)^3 J_y} \dots | 2 \rangle$$

$$= \langle 2 | J_x + (-\phi) J_y - \frac{(-\phi)^2}{2!} J_x - \frac{(-\phi)^3}{3!} J_y + \frac{(-\phi)^4}{4!} J_x + \frac{(-\phi)^5}{5!} J_y - \frac{(-\phi)^6}{6!} J_x + \dots | 2 \rangle$$

$$= \langle 2 | J_x \cos\phi - J_y \sin\phi | 2 \rangle$$

$$= \langle J_x \rangle \cos\phi - \langle J_y \rangle \sin\phi$$

$$\langle J_y \rangle' = \langle 2 | J_y + \underbrace{i \frac{\phi}{\hbar} [J_z, J_y]}_{-i\hbar J_x} + \frac{1}{2!} \underbrace{(i \frac{\phi}{\hbar})^2 [J_z, [J_z, J_y]]}_{-(i\hbar)^2 J_y} + \frac{1}{3!} \underbrace{(i \frac{\phi}{\hbar})^3 [J_z, [J_z, [J_z, J_y]]]}_{(-1)^2 (i\hbar)^3 J_x} \dots | 2 \rangle$$

$$= \langle 2 | J_y + (-1)(-\phi) J_x + \frac{1}{2!} (-1)^2 (-\phi)^2 J_y + \frac{1}{3!} (-1)^2 (-\phi)^2 J_x + \dots$$

$$= \langle 2 | J_y \cos\phi + J_x \sin\phi | 2 \rangle = \langle J_y \rangle \cos\phi + \langle J_x \rangle \sin\phi$$

따라서 $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ 는 벡터다.

Rotation에 대해 이와 같은 transformation property를 보이는 operator를 vector operator 라고 부른다.

다시 chapter 4로 돌아가자.

Time reversal for a spin- $\frac{1}{2}$ system

spin-angular operator S_x, S_y, S_z

consider $\vec{S} \cdot \hat{n} |\hat{n}, \pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\hat{n}, \pm\rangle$

$\hat{n}$ 이 x, y, z 축과 그림과 같은 각도를 가진다.

$\hat{n}$ 은 슬렛던 벡터를 $\hat{y}$ 를 회전축으로 하여 β 만큼 돌리고,

슬를 회전축으로 하여 α 만큼 돌린 결과이다.

따라서, $|\hat{n}, +\rangle$ 을 이렇게 표현할 수 있다.

$$|\hat{n}, +\rangle = e^{-iS_z \frac{\alpha}{\hbar}} e^{-iS_y \frac{\beta}{\hbar}} |z, +\rangle$$

이걸 시간 역전시켜보자. 이때, 각운동량과 마찬가지로 spin도 TR-odd임을 이용한다. $\Theta \vec{S} \Theta^{-1} = -\vec{S}$

$$\begin{aligned} \Theta |\hat{n}, +\rangle &= \Theta e^{-iS_z \frac{\alpha}{\hbar}} e^{-iS_y \frac{\beta}{\hbar}} |z, +\rangle \\ &= e^{+i(-S_z) \frac{\alpha}{\hbar}} e^{+i(-S_y) \frac{\beta}{\hbar}} \Theta |z, +\rangle \\ &= e^{-iS_z \frac{\alpha}{\hbar}} e^{-iS_y \frac{\beta}{\hbar}} \Theta |z, +\rangle \end{aligned}$$

$|z, +\rangle \rightarrow |\hat{n}, +\rangle$ 그리고 $\Theta |z, +\rangle \rightarrow \Theta |\hat{n}, +\rangle$ 모두 같은 operator로 변환되는 관계다.

이제 $\vec{S} \cdot \hat{n}$ 의 eigenket으로서 $|\hat{n}, +\rangle$ 의 성질을 나타낸 식에 Θ 를 취해보자.

$$\begin{aligned} \Theta \vec{S} \cdot \hat{n} |\hat{n}, +\rangle &= \frac{\hbar}{2} \Theta |\hat{n}, +\rangle \\ \underbrace{\Theta \vec{S} \cdot \hat{n} \Theta^{-1}}_{= -\vec{S} \cdot \hat{n}} \Theta |\hat{n}, +\rangle &= \frac{\hbar}{2} \Theta |\hat{n}, +\rangle \end{aligned}$$

$$-\vec{S} \cdot \hat{n} \Theta |\hat{n}, +\rangle = \frac{\hbar}{2} \Theta |\hat{n}, +\rangle$$

$$\vec{S} \cdot \hat{n} \Theta |\hat{n}, +\rangle = -\frac{\hbar}{2} \Theta |\hat{n}, +\rangle$$

$\Theta |\hat{n}, +\rangle$ 은 operator $\vec{S} \cdot \hat{n}$ 에 대해 eigenvalue가 $-\frac{\hbar}{2}$ 인 eigenket 이므로,

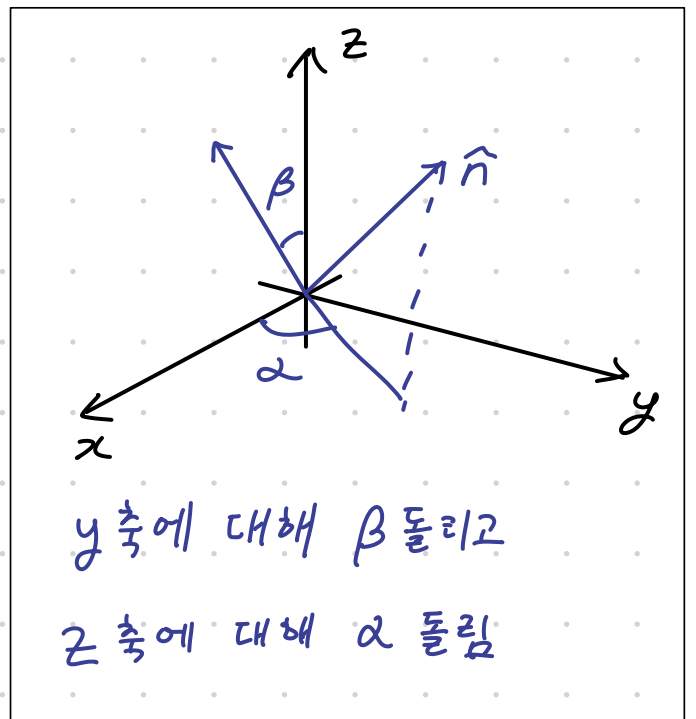
$|\eta|^2 = 1$ 인 스칼라 η 에 대해

$$\Theta |\hat{n}, +\rangle = \eta |\hat{n}, -\rangle \text{ 라고 나타낼 수 있다.}$$

$$\Theta |\hat{n}, +\rangle = e^{-iS_z \frac{\alpha}{\hbar}} e^{-iS_y \frac{\beta}{\hbar}} \Theta |z, +\rangle \text{ 에다가 이 성질을 적용.}$$

$$\Theta |\hat{n}, +\rangle = \eta e^{-iS_z \frac{\alpha}{\hbar}} e^{-iS_y \frac{\beta}{\hbar}} |z, +\rangle$$

$$\text{이게 무슨 논리지... } \eta |\hat{n}, -\rangle = e^{-iS_z \frac{\alpha}{\hbar}} e^{-iS_y \frac{\beta}{\hbar}} |z, +\rangle \text{ 라고 분석해야 하나?}$$



$$\textcircled{H} |z, +\rangle = U K |z, +\rangle = U |z, +\rangle = \eta e^{-i S_y \pi / \hbar} |z, +\rangle$$

원래 $\textcircled{H} = UK$ 라고 정의 했었고, $|z, +\rangle$ 를 basis 로 사용해 $K |z, +\rangle = |z, +\rangle$ 이용.

$$\textcircled{H} |z, +\rangle = UK |z, +\rangle = U |z, +\rangle = \eta |z, -\rangle = \eta e^{-i S_y \frac{\pi}{\hbar}} |z, +\rangle$$

이때, $e^{-i \phi S_y / \hbar} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \sigma_y \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ 을 이용, 증명은 다음 수업에서.

$$U |z, +\rangle = \eta e^{-i S_y \frac{\pi}{\hbar}} |z, +\rangle = -i \eta \sigma_y |z, +\rangle, \quad -i \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U = -i \eta \sigma_y \quad \text{for } \frac{1}{2}\text{-spinner}$$

$$\textcircled{H} = \eta e^{-i \pi S_y / \hbar} K = -i \eta \sigma_y K$$

$$\textcircled{H} |z, +\rangle = -i \eta \sigma_y K |z, +\rangle = -i \eta \sigma_y |z, +\rangle = \eta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta |z, -\rangle$$

$$\textcircled{H} |z, -\rangle = \eta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\eta |z, +\rangle$$

질문) Time reversal 에 의한 flip 을 꼭 S_y 로 정의할 필요가 있는가?
 S_x 로도 가능하지 않은가?

임의 방향의 spinner 에 $\textcircled{H}$ 을 적용.

$$\textcircled{H} (C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle) = C_+^* \textcircled{H} |+\rangle + C_-^* \textcircled{H} |-\rangle = \eta C_+^* |-\rangle - \eta C_-^* |+\rangle$$

$$\textcircled{H}^2 (C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle) = \textcircled{H} \{ \eta C_+^* |-\rangle - \eta C_-^* |+\rangle \} = -\eta \eta^* C_+ |+\rangle - \eta \eta^* C_- |-\rangle = -(C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle)$$

$\frac{1}{2}$ -spin system 에서 $\textcircled{H}^2 = -\mathbb{1}$ 임을 알 수 있다.

시간 역전을 4번 해야 원래로 돌아오는 시스템

$$\begin{cases} \textcircled{H}^2 = -\mathbb{1} & \text{for } \frac{1}{2}\text{-spin} \\ \textcircled{H}^2 = \mathbb{1} & \text{for } 0\text{-spin} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{H}^2 |j\text{-half-integer}\rangle = -|j\text{-half-integer}\rangle \\ \textcircled{H}^2 |j\text{-integer}\rangle = |j\text{-integer}\rangle \end{cases}$$

증명

$$\hat{H} = \eta e^{-i\pi J_y/\hbar} K$$

$$|\alpha\rangle = \sum |j, m\rangle \langle j, m | \alpha\rangle$$

$$\hat{H}^2 |\alpha\rangle = \hat{H} \left(\hat{H} \sum |j, m\rangle \langle j, m | \alpha\rangle \right)$$

$$= \hat{H} \left(\eta e^{-i\pi J_y/\hbar} \sum |j, m\rangle \langle j, m | \alpha\rangle^* \right)$$

$$= \eta e^{-i\pi J_y/\hbar} \left(\eta^* \sum e^{i\pi J_y^*/\hbar} |j, m\rangle \langle j, m | \alpha\rangle \right)$$

$$= \sum e^{-i2\pi J_y/\hbar} |j, m\rangle \langle j, m | \alpha\rangle$$

$$\stackrel{!}{=} \sum (-1)^{2j} |j, m\rangle \langle j, m | \alpha\rangle$$

마지막 식이 어떻게 유도되나, 증명흐름을 알아보면,

$$\textcircled{1} [R(\hat{n}, 2\pi), J_i] = 0 \quad \text{for } \forall \hat{n} \text{ and } J_i$$

② Schur's lemma, 모든 generator 와 commute 하는 operator 는 $C \mathbb{1}$.

$$e^{-i2\pi J_y/\hbar} = C \mathbb{1}$$

③ 적합한 C 를 찾아라.