QM 12th week -1 (TUE)

Interaction with $\mathbb{E}$ and $\mathbb{B}$.

kramer's degeneracy theorem :

for half integer j system if Hamiltonian is time reversal even, every energy eigenstate is doubly degenerate.

proof, $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, $[H, \Theta] = 0$ 이기에,

$\Theta|n\rangle$ 은 $|n\rangle$ 과 에너지 같음.

과연 $|n\rangle$ 과 $\Theta|n\rangle$ 같은가? 다른가?

다르다면 둘은 orthogonal 해야함.

anti unitary operator 의 성질인 $\langle \tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle \alpha|\beta\rangle$

$|\alpha\rangle = |n\rangle$ $\quad |\beta\rangle = \Theta|n\rangle$

$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|n\rangle$ $\quad |\tilde{\beta}\rangle = \Theta^2|n\rangle = -|n\rangle$ 왜 $\Theta^2 = -1$ 이지?

$\langle \tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = -\langle n|\Theta|n\rangle = \langle \alpha|\beta\rangle = \langle n|\Theta|n\rangle$

$\langle n|\Theta|n\rangle = 0$. $|n\rangle$ 과 $\Theta|n\rangle$ 은 orthogonal 하다.

$\mathbb{E}$-field 를 켜자. $V(\vec{x}) = q\phi(\vec{x})$ ($\phi(\vec{x})$: electro static potential)

$V(\vec{x})$ 와 $\phi(\vec{x})$ 모두 time reversal even

전체 해밀토니안은 여전히 Time-reversal even.

kramer's degeneracy 가 유효.

$\mathbb{B}$ 를 켜자 : interaction part. $\vec{S}\cdot\mathbb{B}$, $\mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A}$, $\vec{p}\cdot\mathbb{A} + \mathbb{A}\cdot\vec{p}$

$\vec{S}$ 는 TR-odd. $\vec{p}$ 또한 TR-odd

해밀토니안이 시간 대칭이 깨짐. → two states related by Θ could have different energy

다시 Chapter 3로 돌아가자.

$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ 를 저번 시간에 유도했다.

공간의 차원이 1이라면) 모든 연산자가 스칼라, 모든 연산자가 commute.
$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ 의 관계를 따르는 0이 아닌 operator는 없다.

공간 차원이 2라면) → 이상하게 spin $\frac{1}{2}$ 과 표현식이 같다.

Two-component spinnor.

basis $|+\rangle, |-\rangle$, $S_k|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \equiv \chi_+$ $\quad |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \equiv \chi_-$

$\langle +| = (1\ \ 0) = \chi_+^\dagger$, $\langle -| = (0\ \ 1) = \chi_-^\dagger$

$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix}\langle +|\alpha\rangle\\ \langle -|\alpha\rangle\end{pmatrix}$, $\langle\alpha| = (\langle\alpha|+\rangle \ \ \langle\alpha|-\rangle)$

$\chi = \begin{pmatrix}\langle +|\alpha\rangle\\ \langle -|\alpha\rangle\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}c_+\\ c_-\end{pmatrix} = c_+\chi_+ + c_-\chi_-$

matrix representation of S_k : $\langle\pm|S_k|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle\pm|+\rangle$

$\langle\pm|S_k|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}\langle\pm|-\rangle$

$S_k = \frac{\hbar}{2}\{|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$ $\quad \sigma_k$: Pauli matrix

$S_i = \frac{\hbar}{2}\{|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\}$ $\quad S_j = \frac{\hbar}{2} i\{-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\}$

$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, $\quad S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$, $\quad \sigma_i = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_j = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$

$\langle S_k\rangle = \langle\alpha|S_k|\alpha\rangle = \sum_{a'=\pm}\sum_{a''=\pm}\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|S_k|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2}\chi^\dagger\sigma_k\chi$

Properties of pauli matrix

① $\sigma^2 = \mathbb{1}$ all of them are orthogonal matrix.

② $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ 일종의 antisymmetry? 연산 순서를 바꾸면 음수가 붙음

③ $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

④ $\det(\sigma) = -1$

⑤ $\sigma^{+} = \sigma$ hermitian 이다.

⑥ $Tr(\sigma) = 0$

우리 이제 Pauli matrix 의 vector, $\vec{\sigma} = (\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ 를 정의하자.

임의의 벡터 $\vec{a} = (a_i, a_j, a_k)$ 와의 내적을 계산.

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{a} = a_i\sigma_i + a_j\sigma_j + a_k\sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ia_j \\ ia_j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ 0 & -a_k \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} a_k & a_i - ia_j \\ a_i + ia_j & -a_k \end{pmatrix}$$

아주 신기한 관계를 얻을 수 있다.

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_k & a_i - ia_j \\ a_i + ia_j & -a_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_k & b_i - ib_j \\ b_i + ib_j & -b_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{b} + i[\vec{a}\times\vec{b}]_k & a_kb_i - a_ib_k + i(a_jb_k - a_kb_j) \\ a_ib_k - a_kb_i + i(a_jb_k - a_kb_j) & \vec{a}\cdot\vec{b} - i[\vec{a}\times\vec{b}]_k \end{pmatrix}$$

$$i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{pmatrix} i[\vec{a}\times\vec{b}]_k & [\vec{a}\times\vec{b}]_j + i[\vec{a}\times\vec{b}]_i \\ -[\vec{a}\times\vec{b}]_j + i[\vec{a}\times\vec{b}]_i & -i[\vec{a}\times\vec{b}]_k \end{pmatrix}$$

이것을 대입하면 결국

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \mathbb{1}\,\vec{a}\cdot\vec{b} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^2 = \mathbb{1}|\vec{a}|^2 \quad \text{특히 } |\vec{a}|^2 = 1 \text{ 일때, } \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^n = \begin{cases} \vec{\sigma}\cdot\vec{a} & (n \text{ is odd}) \\ \mathbb{1} & (n \text{ is even}) \end{cases}$$

이 성질이 나중에 증명할때 유용하게 쓰인다.

지난 시간, $e^{-i\phi S_y/\hbar} = \mathbb{1}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\sigma_y \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ 을 이용했다. 이제 이걸 증명할 차례

$$\vec{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}$$

Rotation operator $D(\hat{n},\phi) = \exp\left(-i\frac{\phi}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\right) = \exp\left(-i\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right)$

이걸 테일러 전개.

$$\exp\left(-i\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right) = \mathbb{1} + \left(-i\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^2 + \frac{1}{3!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^3(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^3 + \frac{1}{4!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^4(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^4 \cdots$$

$$= \mathbb{1} + \left(-i\frac{\phi}{2}\right)(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^3(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) + \frac{1}{4!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$= \mathbb{1}\left\{1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \cdots\right\} - i\left\{\frac{\phi}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \cdots\right\}(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$$

$$= \mathbb{1}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$$

$$\therefore D(\hat{n},\phi) = \mathbb{1}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \mathbb{1}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\frac{2}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$D(\hat{n},\phi) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - in_z\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-in_x - n_y)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-in_x + n_y)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + in_z\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

축에 상관없이, $\hat{n}$ 에 상관없이 2π 만큼 돌리자.

$$D(\hat{n},2\pi) = -\mathbb{1}.$$

이상한 결과. 이건 2차원의 특성이다.

in general, $e^{-i2\pi\vec{J}\cdot\hat{n}/\hbar}|j,m\rangle = (-1)^{2j}\mathbb{1}|j,m\rangle$

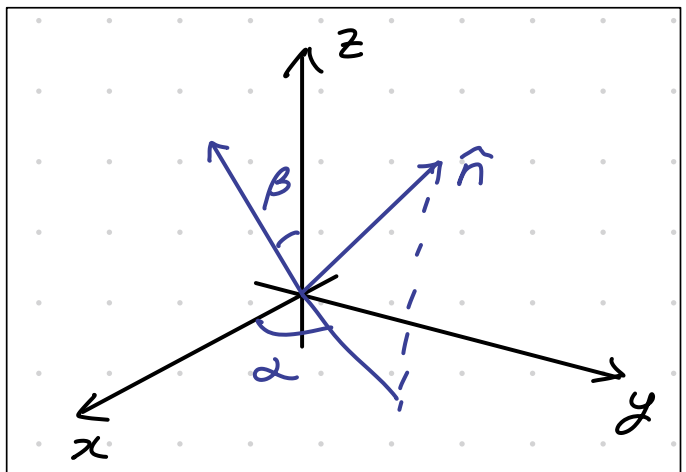
맨 처음에 정의한 $\hat{n}$ 방향의 spinner χ, 이것에 대한 표현식을 명시적으로 구해 보자.

$$\chi = D(\hat{z},\alpha)D(\hat{y},\beta)|+\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$



y축에 대해 β 돌리고

z축에 대해 α 돌림

SO(3), SU(2) 비교하기

SO(3): set of all rotation about origin in 3D-space.

Special Orthogonal group

$R^T R = \mathbb{1}$ Orthogonality constraint preserves length and angle

$\det(R) = 1$: Special.

이 조건을 만족시키지 않으면 회전이 아니다.

예시로 $\det(R) = -1$ 이면 반사이다.

SO(3)는 group이다.

Group의 특성

① 닫힘. ($\forall\ a, b \in G$ then $a \cdot b \in G$)

② associativity ($\forall\ a, b, c \in G$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$)

③ identity element ④ inverse

SU(2) ; set of 2x2 unitary matrix with det(1)

SO(3) 와 SU(2) 의 관계

Lie theory : about continuous symmetries
infinitesimal transformation $g(\epsilon) = 1 + \epsilon X$
↳ generator

SO(3) 와 SU(2) 모두 Lie group 이다.

For a Lie group G, the Lie algebra $g \in G$ is
such that $e^{\phi X} \in G$ $\phi \in \mathbb{R}$.

SO(3) 인 경우, $R \in G$, $R = e^{\phi J}$ (J 가 x 였음)

$$R^\dagger R = (e^{\phi J})^T e^{\phi J} = \mathbb{1}.$$

$$J^T + J = 0$$

$$\det(R) = \det(e^{\phi J}) = e^{Tr\,\phi J} = 1$$

$Tr\,\phi J = 0$, $Tr\,J = 0$

이 조건을 만족하려면,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

우리는 $e^{i\phi J}$ 이런식으로 operator 를 정의 하였서

앞에 다 i 를 곱해주고

$$J_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$ 의 성질을 가진다.

Lie algebra of SU(2)

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \quad \rightarrow \quad (e^{iJ_i})^\dagger (e^{iJ_i}) = \mathbb{1}$$

$$\det(U) = 0 \quad \rightarrow \quad tr(J) = 0$$

설명을 놓침.

Parameter space of SU(2) and SO(3)

$SU(2)$: $U(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ $\quad |a|^2 + |b|^2 = 1$.

4개의 실수가 필요. $\quad a = \alpha + \beta i$

$b = \gamma + \delta i$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$.

$SU(2)$ 가 전체 3-sphere 이다. (3-space)

$SO(3)$ 는 반쪽 3-sphere 이다.

$SU(2)$ 에서 2개의 원소가 $SO(3)$ 에서는 1개에 해당.

그러나 locally isomorphic