

$$D_{m'm}^{(j)}(R) = \langle j, m' | \exp(-\frac{i}{\hbar} \phi \vec{J} \cdot \hat{n}) | j, m \rangle$$

오일러 각을 이용한 표현은,

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha} e^{-im\gamma} \langle j, m' | \exp(-\frac{i}{\hbar} \beta J_y) | j, m \rangle$$

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \langle j, m' | \exp(-\frac{i}{\hbar} \beta J_y) | j, m \rangle$$

임의의 j 에 대해서 $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ 을 구하기 위한 일반적인 방법은 없을까?

Schwinger's oscillation model 을 소개한다!

2 개의 독립적인 oscillator 와, 그들 각각의 ladder operator 를 고려한다.
각각을 plus type oscillator, minus type oscillator 라고 부른다.

$\left\{ \begin{array}{l} a_+ \text{ \& } a_+^\dagger : \text{ ladder operator for plus type oscillator} \\ a_- \text{ \& } a_-^\dagger : \text{ ladder operator for minus type oscillator} \end{array} \right.$

harmonic oscillator 에서 한 것과 같은 방식으로 number operator 를 정의.
각각의 oscillator 에 대해

$$N_+ = a_+^\dagger a_+ , \quad N_- = a_-^\dagger a_-$$

$$N_+ + 1 = a_+ a_+^\dagger , \quad N_- + 1 = a_- a_-^\dagger$$

commutation relation 도 harmonic oscillator 때와 같다.

$$[a_+, a_+^\dagger] = 1 , \quad [a_-, a_-^\dagger] = 1$$

$$[N_+, a_+] = -a_+ , \quad [N_-, a_-] = -a_-$$

$$[N_+, a_+^\dagger] = a_+^\dagger , \quad [N_-, a_-^\dagger] = a_-^\dagger$$

서로 다른 oscillator 를 위한 operator 은 commute 한다.

$$[a_+^\dagger, a_-] = 0 , \quad [a_+, a_-^\dagger] = 0$$

때문에 두 number operator 는 commute 한다.

$$[N_+, N_-] = 0$$

두 operator 에 대한 simultaneous eigenket 을 고려할 수 있다.

$$N_+ |n_+, n_-\rangle = n_+ |n_+, n_-\rangle, \quad N_- |n_+, n_-\rangle = n_- |n_+, n_-\rangle$$

ladder operator 도 양쪽에 따로 작용한다.

$$a_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+} |n_+ - 1, n_-\rangle, \quad a_- |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_-} |n_+, n_- - 1\rangle$$

$$a_+^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1} |n_+ + 1, n_-\rangle, \quad a_-^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_- + 1} |n_+, n_- + 1\rangle$$

바닥 상태에서 내리면 0 이 된다.

$$a_+ |0, 0\rangle = 0, \quad a_- |0, 0\rangle = 0$$

질문) $a_+ |0, n_-\rangle = 0, a_- |n_+, 0\rangle = 0$ 이 임의의 n_- 와 n_+ 에 성립하는가?

Harmonic potential 에서 $|0\rangle$ 부터 raising operator 를 적용해 모든 상태를 정의하는 기법을 이용

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0, 0\rangle$$

이쯤에서 n_+ 와 n_- 의 정체를 설명할 때가 왔다.

이 모델은 마치 z-angular momentum 의 최대값 (j - quantum number) 의 2배 만큼 $1/2$ - spin 의 입자가 내재되어 있다고 가정한 것이다.

그중 up-spin 의 수가 n_+ , down-spin 의 수가 n_- 인 것이다.

다만, 이 가상의 $1/2$ spin 입자들은 서로 구별되지 않는다.

up-spin 1개는 z-angular momentum 에 $\frac{\hbar}{2}$ 만큼 기여하고,

down-spin 1개는 z-angular momentum 에 $-\frac{\hbar}{2}$ 만큼 기여한다.

Total momentum 이 보존되면, (j 가 바뀌지 않으면) 전체 spin 수는 유지되어야 한다.

z-방향 운동량을 올리고 내리는 $J_\pm$ 를 정의.

Ladder operator 는 무차원 이라, $\hbar$ 를 곱해 준다.

$$J_+ = \hbar a_+^\dagger a_- = \hbar a_- a_+^\dagger \quad \text{의미: down spin 을 하나 줄이고 up spin 을 하나 늘림 (순서 무관)}$$

$$J_- = \hbar a_-^\dagger a_+ = \hbar a_+ a_-^\dagger \quad \text{의미: up spin 을 하나 줄이고 down spin 을 하나 늘림 (순서 무관)}$$

마까 가상의 up-spin 이 z -momentum 에 $\frac{\hbar}{2}$ 기여하고 down spin 은 반대라고 한 것처럼,
 J_z 는 number operator 로 정의.

$$J_z = \frac{\hbar}{2} (N_+ - N_-) = \frac{\hbar}{2} (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)$$

Commutation relation 을 보자.

$$[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm$$

직관적 이해...? 예시)

$$\begin{aligned} [J_z, J_\pm] |j, m\rangle &= J_z J_\pm |j, m\rangle - J_\pm J_z |j, m\rangle \\ &= \{ \hbar(m \pm 1) - \hbar m \} J_\pm |j, m\rangle \end{aligned}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

→ proof

$$\hbar^2 [a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+] = \hbar^2 a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger] a_+ + \hbar^2 a_-^\dagger [a_+^\dagger, a_+] a_- = \hbar^2 (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = 2\hbar J_z$$

다른 type 의 ladder operator 는 commute 항을 이용

마까 이야기한 "가상의 $\frac{1}{2}$ spin 입자들" 비유에 따르면 $J_+ J_-$ 와 $J_- J_+$ 의 결과가
 같아야 할 것 같지만, 실제로는 그렇지 않다.

전체 스핀 수를 나타내는 number operator 정의.

$$N = N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$$

원래 하던대로 다른 방향의 angular momentum 정의

$$J_x = \frac{1}{2} (J_+ + J_-), \quad J_y = \frac{1}{2i} (J_+ - J_-)$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{4} \left(J_+^2 + J_-^2 + \{J_+, J_-\} - (J_+^2 + J_-^2 - \{J_+, J_-\}) \right) = \frac{1}{2} \{J_+, J_-\}$$

Total angular momentum 을 이렇게 정의

$$J^2 \equiv J_z^2 + \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) \rightarrow \text{왜 이렇게 정의하나?}$$

$$J^2 = \frac{\hbar^2}{2} N \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \rightarrow \hbar^2 j(j+1) \text{ 과 직결됨.}$$

J_+ 와 J_- , J_z 를 적용할 때 붙는 계수를 n_+ 와 n_- 에 대해 나타내자.

$$J_+ |n_+, n_-\rangle = \hbar a_+^\dagger a_- |n_+, n_-\rangle = \hbar \sqrt{(n_++1)n_-} |n_++1, n_--1\rangle$$

$$J_- |n_+, n_-\rangle = \hbar a_-^\dagger a_+ |n_+, n_-\rangle = \hbar \sqrt{(n_-+1)n_+} |n_+-1, n_-+1\rangle$$

$$J_z |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2} (N_+ - N_-) |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2} (n_+ - n_-) |n_+, n_-\rangle$$

세 연산 결과 모두 $N = N_+ + N_- = n_+ + n_-$ 은 바뀌지 않은 것에 주목
원래 알고 있던

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle$$

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

이 결과와 비교하면, n_+ , n_- 와 j, m 의 관계를 구할 수 있다.

$$m = \frac{1}{2} (n_+ - n_-), \quad j = \frac{1}{2} (n_+ + n_-)$$

$$n_+ = j + m, \quad n_- = j - m$$

이제 $|j, m\rangle$ 을 일반적으로 나타낼 수 있다.

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0, 0\rangle \implies |j, m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m} (a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |0, 0\rangle$$

이제 모든 j 에 대한 general rotation matrix 를 찾을 수 있다.

α 와 γ 는 빼두고 β 각만 돌려보자.

$$D(R) = D(\alpha=0, \beta, \gamma=0) = \exp(-i \frac{\beta}{\hbar} J_y)$$

$$D(R) |j, m\rangle = D(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m} (a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |0, 0\rangle$$

어떤 연산자 A 와 B 에 대해,

$$(BAB^{-1})^n = BAB^{-1}BAB^{-1} \dots BAB^{-1} = BA \mathbb{1} A \mathbb{1} A \dots \mathbb{1} AB^{-1} = BA^n B^{-1}$$

이 성질을 이용.

$$= \frac{[D(R) a_+^\dagger D^{-1}(R)]^{j+m} [D(R) a_-^\dagger D^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} \underbrace{D(R) |0, 0\rangle}_{=0}$$

$$D(R) |j, m\rangle = \frac{D(R) (a_+^\dagger)^{j+m} D^{-1}(R) D(R) (a_-^\dagger)^{j-m} D^{-1}(R)}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} D(R) |0, 0\rangle$$

$$= \frac{[D(R) a_+^\dagger D^{-1}(R)]^{j+m} [D(R) a_-^\dagger D^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} D(R) |0, 0\rangle$$

0일때, $D(R) |0, 0\rangle = |0, 0\rangle$ 이기 때문에,

$$D(R) |j, m\rangle = \frac{[D(R) a_+^\dagger D^{-1}(R)]^{j+m} [D(R) a_-^\dagger D^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle$$

이제 Baker Housdoff Lemma 를 이용해서 $D(R) a_+^\dagger D^{-1}(R)$ 과 $D(R) a_-^\dagger D^{-1}(R)$ 을 전개한다.

$D(R) = \exp(-i \frac{\beta}{\hbar} J_y)$ 를 대입, $D(R) a_+^\dagger D^{-1}(R) = \exp(-i \frac{\beta}{\hbar} J_y) a_+^\dagger \exp(\frac{\beta}{\hbar} J_y)$, $a_-^\dagger$ 도 마찬가지.

Baker Housdoff Lemma - operator G, A and number λ

나만의 표기법 사용. $[^n G, A] = \underbrace{[G, [G, \dots [G, A] \dots]]}_{n\text{번}}$, $[^0 G, A] \equiv A$

$$\exp(iG\lambda) A \exp(-iG\lambda) = A + (i\lambda) [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!} [G, [G, [G, A]]] + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} [G, [G, \dots [G, A] \dots]] + \dots$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} [^n G, A]$$

$n\%4 =$	0	1	2	3
i^n	1	i	-1	-i
$-i \times i^n$	-i	1	i	-1

$\rightarrow \cos\theta$ 를 위한 cycle

$\rightarrow \sin\theta$ 를 위한 cycle

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 + \dots = \sum_{\substack{l \text{ is} \\ \text{even number}}} (i)^l \frac{\theta^l}{l!}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots = \sum_{\substack{k \text{ is} \\ \text{odd number}}} -i(i)^k \frac{\theta^k}{k!}$$

G 자리에 $-\frac{1}{\hbar} J_y$ 를, λ 자리에 β 를 넣어 계산. Commutator 몇 개를 미리 계산.

$$[-\frac{1}{\hbar} J_y, a_+^\dagger] = -\frac{1}{\hbar} [\frac{1}{2i} (J_+ - J_-), a_+^\dagger] = \frac{i}{2} [a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger] = \frac{1}{2i} a_-^\dagger [a_+, a_+^\dagger] = \frac{1}{2i} a_-^\dagger$$

$$[-\frac{1}{\hbar} J_y, [J_y, a_+^\dagger]] = \frac{i}{2\hbar} [J_y, a_-^\dagger] = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{2i} [a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+, a_-^\dagger] = \frac{1}{4} a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger] = \frac{1}{4} a_+^\dagger$$

$$[-\frac{1}{\hbar} J_y, a_+^\dagger]^n = \begin{cases} \text{if } n \text{ is odd: } \frac{-i}{2^n} a_-^\dagger \\ \text{if } n \text{ is even: } \frac{1}{2^n} a_+^\dagger \end{cases}$$

$$\exp(-i \frac{\beta}{\hbar} J_y) a_+^\dagger \exp(\frac{\beta}{\hbar} J_y) = \sum_n \frac{(i\beta)^n}{n!} [-\frac{1}{\hbar} J_y, a_+^\dagger]^n = \sum_{\substack{l \text{ is} \\ \text{even}}} \frac{i^l}{l!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^l a_+^\dagger + \sum_{\substack{k \text{ is} \\ \text{odd}}} \frac{i^k}{k!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^k (-i a_-^\dagger) = a_+^\dagger \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + a_-^\dagger \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

그 어떤 자료도 이렇게 자세히 풀어 주지 않을 걸.

$$D(R) a_{-}^{\dagger} D^{-1}(R) = \exp(-i \frac{\beta}{\hbar} J_y) a_{-}^{\dagger} \exp(i \frac{\beta}{\hbar} J_y) \text{ 도 마찬가지로 계산.}$$

$$[-\frac{1}{\hbar} J_y, a_{-}^{\dagger}] = \frac{i}{2} a_{+}^{\dagger}, \quad [-\frac{1}{\hbar} J_y, [-\frac{1}{\hbar} J_y, a_{-}^{\dagger}]] = \frac{1}{4} a_{+}^{\dagger}$$

$$[-\frac{1}{\hbar} J_y, a_{-}^{\dagger}] = \begin{cases} n \text{ is odd} : \frac{i}{2^n} a_{+}^{\dagger} \\ n \text{ is even} : \frac{1}{2^n} a_{-}^{\dagger} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \exp(-i \frac{\beta}{\hbar} J_y) a_{-}^{\dagger} \exp(i \frac{\beta}{\hbar} J_y) &= \sum_n \frac{(i\beta)^n}{n!} [-\frac{1}{\hbar} J_y, a_{-}^{\dagger}]^n = \sum_{\substack{l \text{ is} \\ \text{even}}} \frac{i^l}{l!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^l a_{-}^{\dagger} - \sum_{\substack{k \text{ is} \\ \text{odd}}} \frac{-i \cdot (i)^k}{k!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^k a_{+}^{\dagger} \\ &= a_{-}^{\dagger} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - a_{+}^{\dagger} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

정리하면,
$$\begin{pmatrix} D(R) a_{+}^{\dagger} D^{-1}(R) \\ D(R) a_{-}^{\dagger} D^{-1}(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{+}^{\dagger} \\ a_{-}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

$$D(R) |j, m\rangle = \frac{[a_{+}^{\dagger} \cos \frac{\beta}{2} + a_{-}^{\dagger} \sin \frac{\beta}{2}]^{j+m} [-a_{+}^{\dagger} \sin \frac{\beta}{2} + a_{-}^{\dagger} \cos \frac{\beta}{2}]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |0, 0\rangle$$

이때 binomial expansion 을 이용. $(x+y)^N = \sum_k \frac{N! x^{N-k} y^k}{(N-k)! k!}$

$$D(R) |j, m\rangle = \sum_k \sum_l \frac{(j+m)! (j-m)!}{(j+m-k)! k! (j-m-l)! l!} \cdot \frac{(a_{+}^{\dagger} \cos \frac{\beta}{2})^{j+m-k} (a_{-}^{\dagger} \sin \frac{\beta}{2})^k (-a_{+}^{\dagger} \sin \frac{\beta}{2})^{j-m-l} (a_{-}^{\dagger} \cos \frac{\beta}{2})^l}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |0\rangle$$

이것을 $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ 로 나타낸 $D(R) |j, m\rangle$ 의 식과 비교.

$$D(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \sum_{m'} d_{m'm}^{(j)}(\beta) \frac{(a_{+}^{\dagger})^{j+m'} (a_{-}^{\dagger})^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')! (j-m')!}} |0\rangle$$

$a_{+}^{\dagger}$ 와 $a_{-}^{\dagger}$ 의 지수가 같은 항을 비교.

$$a_{+}^{\dagger} \text{ 의 지수 : } \begin{cases} 1\text{식} : 2j-k-l \\ 2\text{식} : j+m' \end{cases}$$

$$a_{-}^{\dagger} \text{ 의 지수 : } \begin{cases} 1\text{식} : k+l \\ 2\text{식} : j-m' \end{cases}$$

양쪽 다 $l = j-k-m'$ 이라는 결론. m', k 가 결정되면 l 은 정해진다.

이식에서 $\cos \frac{\beta}{2}$, $\sin \frac{\beta}{2}$, -1 의 지수를 m, m', k, j 에 대해 나타낸다.

$$\begin{cases} \cos \frac{\beta}{2} : j+m-k+l = 2j-2k+m-m' \\ \sin \frac{\beta}{2} : k+j-m-l = 2k-m+m' \\ -1 : j-m-l = k-m+m' \end{cases}$$

마침내, $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ 에 대한 완전한 식, Wigner's formula를 얻을 수 있다.

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k-m+m')!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2k-m+m'}$$