

QM 13th week - 2

스핀을 무시 할 수 있다면, 입자 하나에 작용하는 angular momentum은 orbital angular momentum과 같다. L 을 wave function (on position and momentum)에 작용하는 연산자로 취급하자.

고전 역학에서와 똑같이 정의된다.

$$L = r \times p, \quad p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$$

r 와 p 연산자로 L_x, L_y, L_z 각각을 나타내면, 역시 고전역학과 같다.

$$L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x$$

밀단 z 를 회전축 삼아 $\delta\phi$ 만큼 회전 시키는 infinitesimal operator L 을 고려

$$L = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi L_z = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi (x p_y - y p_x)$$

x, p 형식으로 나타낸 L 을 $|x', y', z'\rangle$ 에 적용하면 어떻게 되나?

p 가 원래 infinitesimal translation operator였음을 잊지 말라.

$$\text{translation operator: } T(dx') = 1 - \frac{i}{\hbar} p \cdot dx'$$

$$T(dx') |x'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} p \cdot dx'\right) |x'\rangle = |x' + dx'\rangle$$

$L|x', y', z'\rangle$ 을 계산하기 위해, $x p_y - y p_x$ 에서 position operator가 먼저 ket에

적용되도록 수정. $[x, p] = i\hbar$, $x p = i\hbar + p x$ 를 이용.

$$x p_y - y p_x = i\hbar + p_y x - i\hbar - p_x y = p_y x - p_x y \text{ 를 적용}$$

$$\begin{aligned} L|x', y', z'\rangle &= 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi (x p_y - y p_x) |x', y', z'\rangle = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi (p_y x - p_x y) |x', y', z'\rangle \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \{p_y (\delta\phi x') - p_x (\delta\phi y')\} |x', y', z'\rangle \\ &= |x' - y' \delta\phi, y' + x' \delta\phi, z'\rangle \end{aligned}$$

고전적으로 z -축 회전을 했을 때 일어나는 일과 똑같다.

임의의 상태 $|\alpha\rangle$ 에 L 을 작용하고 이를 $x' y' z'$ 로 나타낸다면,

$$\langle x', y', z' | (1 - \frac{i}{\hbar} L_z \delta\phi) | \alpha \rangle = \langle x' + y' \delta\phi, y' - x' \delta\phi, z' | \alpha \rangle$$

일종의 passive transform 이 나타난다.

r, θ, ϕ 의 좌표로 확인하는 편이 더 명백할 수 있다.

$$\begin{aligned} \langle r, \theta, \phi | 1 + \frac{1}{i\hbar} L_z \delta\phi | \alpha \rangle &= \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle \quad \text{ } \phi \text{ 에 대해 1차 테일러 전개} \\ &= \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle - \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \end{aligned}$$

따라서, spherical coordinate 에서 L_z 를 나타내자면,

position eigenket $|r, \theta, \phi\rangle = |X'\rangle$ 에 대해,

$$\langle X' | L_z | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle X' | \alpha \rangle$$

이라고 할 수 있겠다. 마치 p_x 가 x 를 translate 하여 $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ 인 것처럼,

L_z 또한 ϕ 를 translate 하여 $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ 인 것이다.

($\frac{\partial}{\partial \phi}$ 연산이 무차원 이기에, angular momentum의 차원과 $\hbar$ 의 차원이 같음을 알 수 있다.)

비슷한 방법으로 L_x 와 L_y 도 다룰 수 있다.

$$\langle x', y', z' | 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi_x L_x | \alpha \rangle = \langle x', y' + z' \delta\phi_x, z' - y' \delta\phi_x | \alpha \rangle$$

$\langle x', y' + z' \delta\phi_x, z' - y' \delta\phi_x |$ 를 spherical coordinate 로 나타내면...?

뭐지? 어찌 바꾸지? 일단 아래 결과가 나와야 한다.

$$\langle r, \theta, \phi | 1 + \frac{1}{i\hbar} \delta\phi_x L_x | \alpha \rangle = \langle r, \theta + \sin\phi \delta\phi_x, \phi + \cot\theta \cos\phi \delta\phi_x | \alpha \rangle$$

따라서 L_x 를 r, θ, ϕ coordinate 로 나타내면,

$$\langle X' | L_x | \alpha \rangle = -i\hbar \left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle X' | \alpha \rangle \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\text{아마 이 결과는} \\ &y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \text{ 를} \\ &\text{coordinate transform 해도} \\ &\text{얻을 수 있을 것이다.} \end{aligned}$$

L_y 는 이렇게 생겼다.

$$\langle X' | L_y | \alpha \rangle = -i\hbar \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle X' | \alpha \rangle$$

어떻게 하면 L_x 와 L_y 에 대한 식을 직관적으로 이해 할 수 있을까?

$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ 라고 정의한 것에 따라, $L_{\pm}$ 를 구해보면 훨씬 간단한게 나타난다.

$$\langle X' | L_{\pm} | \alpha \rangle = -i\hbar \left\{ \underbrace{(-\sin\phi \pm i\cos\phi)}_{\pm ie^{\pm i\phi}} \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \underbrace{(\cos\phi \pm \sin\phi)}_{e^{\pm i\phi}} \frac{\partial}{\partial\phi} \right\} \langle X' | \alpha \rangle$$

$$\langle X' | L_{\pm} | \alpha \rangle = -i\hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm i \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle X' | \alpha \rangle$$

마지막으로, total angular momentum $L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$

$$\langle X' | L^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] \langle X' | \alpha \rangle$$

$r=1$ 일때 spherical coordinate 에서 Laplacian 과 닮았다!

어째서? 아마 슈뢰딩거 방정식을 풀고 변수분리를 하다 보면 그렇게 될 것이다.

3.6.2 spherical harmonics

양자수 n, l, m 으로 특징되는 상태를 $|n, l, m\rangle$ 이라 볼 수 있다.

이것을 공간 좌표로 나타내면,

$$\langle X' | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

potential 이 회전 에 symmetry 를 가져서, 각도 (θ, ϕ) 에만 dependent 한 항

$Y_l^m(\theta, \phi)$ 만 분리할 수 있다고 가정.

θ 와 ϕ 에 대한 정보만을 가진 directional eigen ket $|\hat{n}\rangle$ 을 도입,

$$\langle \hat{n} | l, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi) \text{ 라고 볼 수 있다.}$$

$\langle \hat{n} | L_z | l, m \rangle$ 이 무엇인지 두 가지로 평가하자.

① $L_z | l, m \rangle = m\hbar | l, m \rangle$ 이므로, $\langle \hat{n} | L_z | l, m \rangle = \hbar m \langle \hat{n} | l, m \rangle = \hbar m Y_l^m(\theta, \phi)$

② 앞서 확인한 것 처럼, $\langle \hat{n} | L_z | l, m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \langle \hat{n} | l, m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} Y_l^m(\theta, \phi)$

따라서 $Y_l^m(\theta, \phi)$ 에 대한 미분 방정식은

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial \phi} + m\right) Y_l^m = 0$$

이런 아주 간단한 1차 미방이 나오며, Y_l^m 에서 ϕ 에 대한 부분은 $e^{im\phi}$ 여야만 한다.

$$Y_l^m(\theta, \phi) = e^{im\phi} y_l^m(\theta), \quad y_l^m(\theta) \text{ 은 아직 모른다.}$$

마찬가지로, L^2 의 성질, $L^2 |l m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l m\rangle$ 을 이용한다면,

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \right] Y_l^m(\theta, \phi) = 0$$

예전에 수소 원자 슈방을 풀 때, $l(l+1)$ 이 변수 분리 인자로 기능했을 것이다.

$Y_l^m(\theta, \phi)$ 의 orthogonal 한 성분을 확인해 보자.

$\langle l' m' | l m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$ 임에 따라,

$$\int d\Omega_{\hat{n}} |\hat{n}\rangle \langle \hat{n}| = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta |\hat{n}\rangle \langle \hat{n}| = 1 \quad \text{을 적용.}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \langle l' m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l m \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta Y_{l'}^{m'*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

$L_{\pm}$ 의 특성으로 넘어가자. $m = \pm l$ 일 때, (z -angular momentum 이 최대/최소 일 때)

$L_{\pm}$ 를 적용하면 0 이 나와야 한다.

$$\langle \hat{n} | L_{\pm} | l, m = \pm l \rangle = 0 \quad \text{따라서} \quad L_{\pm} Y_l^{\pm l} = 0$$

$$-i\hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^{\pm l} = 0$$

여기에 $Y_l^{\pm l} = e^{\pm i\phi l} y_l^{\pm l}(\theta)$ 를 대입,

$$\text{자잘한 계산: } \pm i \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^{\pm l} = \pm i e^{\pm i\phi l} \frac{\partial}{\partial \theta} y_l^{\pm l}(\theta), \quad -\cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^{\pm l} = \mp i l \cot \theta e^{\pm i\phi l} y_l^{\pm l}(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) y_l^{\pm l}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) y_l^{\pm l}(\theta) = 0 \quad \text{이라는 방정식을 얻었다.}$$

$\frac{\partial}{\partial \theta}$ 이 $\sin \theta$ 를 하나 없애는 대신 $\cos \theta$ 를 만들고,

거기에 l 이 곱해진다는 점에서 $y_l^{\pm l}(\theta) = C_l \sin^l \theta$ 라는 걸 알 수 있다.

이때 C_l 은 계수.

$$\text{최종적으로, } Y_l^{\pm l}(\theta, \phi) = e^{\pm i\phi l} C_l \sin^l \theta$$

이 식을 이용하여, L^2, L_z 의 eigen state 는 반정수 l 을 가질 수 없음을 확인할 수 있다.

$$l = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \text{ 대입} \quad Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta, \phi) = C_{\frac{1}{2}} e^{i\phi/2} \sqrt{\sin \theta}$$

$$l = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \text{ 대입} \quad Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\theta, \phi) = C'_{\frac{1}{2}} e^{-i\phi/2} \sqrt{\sin \theta}.$$

$Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 에 L_- 를 취해서 $Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}$ 가 나오는지 확인해 본다.

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} | L_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= -i\hbar e^{-i\phi} \left(-i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (C_{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} \sqrt{\sin \theta}) \\ &= -C_{\frac{1}{2}} e^{-i\phi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta}} \end{aligned}$$

$Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}$ 과 형태가 맞지 않는다.

또한 $\frac{1}{\sqrt{\sin \theta}}$ 때문에 $\theta = 0, \pi$ 에서 singularity 를 가진다.

적분을 이용해 normalization을 진행하여 C_l 을 구할 수 있다.

직접 계산하지 않고 교과서 내용을 빌리면, $C_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}}$

Y_l^l 을 알았으니 이제 ladder operator를 사용해 모든 상태를 구할 수 있다.

이 연속된 과정의 일반식을 구하자면,

$$L_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle$$

$$Y_l^{m-1} = \frac{\langle \hat{n} | L_- |l, m\rangle}{\hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \quad (\text{Sakurai 3.246})$$

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \phi)]^*$$

$$Y_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

교수님께서서는 이와 똑같은 내용을 J 를 이용해 유도했다.

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

천장 상태 $|j, j\rangle$ 에서 $|j, m\rangle$ 이 될 때까지 J_- 을 $j-m$ 번 적용하자.

$$(J_-)^{j-m} |j, j\rangle = \hbar^{j-m} \sqrt{\underbrace{\{(j+j) \cdots (j+m+1)\}}_{j+m+1 \text{ 부터 } 2j \text{ 까지 곱함}} \underbrace{\{(j-j+1) \cdots (j-m-1+1)\}}_{1 \text{ 부터 } j-m \text{ 까지 곱함}}} |j, m\rangle = \hbar^{j-m} \sqrt{\frac{(2j)!(j-m)!}{(j+m)!}} |j, m\rangle$$

$$\therefore |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}} \left(\frac{J_-}{\hbar} \right)^{j-m} |j, j\rangle$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar} \right)^{l-m} Y_l^l(\theta, \phi)$$

앗! 헛갈린다! J, L, S , 이 셋의 관계는 무엇인가?

AI 답변 내용을 추가한다.

다시 본론으로 돌아와서,

$$(L_-) Y_l^{m'}(\theta, \phi) = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_l^{m'-1}(\theta, \phi)$$

$$Y_l^{m'}(\theta, \phi) = e^{im'\phi} f(\theta) \text{ 를 대입}$$

$$(L_-) e^{im'\phi} f(\theta) = -i\hbar e^{-i\phi} \left(-i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) e^{im'\phi} f(\theta)$$

$$= -\hbar e^{i(m'-1)\phi} \left(\frac{d}{d\theta} + m' \cot \theta \right) f(\theta)$$

$$\stackrel{?}{=} \hbar e^{i(m'-1)\phi} (\sin \theta)^{l-m'} \frac{d}{d \cos \theta} [f(\theta) \sin^{m'}(\theta)]$$

교수님 판서에 따른 건데, 마지막줄 $\sin \theta$ 의 지수에 오류가 있어 보인다.

$$\longrightarrow \text{검산} \quad \frac{d}{d \cos \theta} = \frac{d\theta}{d \cos \theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \text{ 을 적용.}$$

$$\frac{d}{d \cos \theta} [f(\theta) \sin^{m'}(\theta)] = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} [f(\theta) \sin^{m'}(\theta)]$$

$$= -\frac{1}{\sin \theta} \left(m' \cos \theta \sin^{m'-1}(\theta) f(\theta) + \sin^{m'}(\theta) \frac{df}{d\theta} \right)$$

$$= -\sin^{m'-1}(\theta) \left(m' \cot \theta + \frac{d}{d\theta} \right) f(\theta)$$

$$-\hbar e^{i(m'-1)\phi} \left(\frac{d}{d\theta} + m' \cot \theta \right) f(\theta) = \hbar e^{i(m'-1)\phi} \sin^{l-m'}(\theta) \frac{d}{d \cos \theta} [f(\theta) \sin^{m'}(\theta)]$$

아하! 교수님 계신 1을 l로 잘못 쓰신 거였다.

Y_l^0 에 L_- 을 k번 적용하면? $\longrightarrow$ 은근 유추하기 어려움.

$$(L_-)^k e^{im'\phi} f(\theta) = \hbar^k e^{i(m'-k)\phi} \sin^{k-m'} \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^k [f(\theta) \sin^{m'}(\theta)] \quad (\text{식 } \star)$$

식 3.426을 유도하겠다.

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} Y_l^l(\theta, \phi)$$

에다가 $\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} Y_l^l(\theta, \phi)$ 에 대한 명시적인 식을 넣기 위해 지금까지 풀었다.

$$Y_l^l(\theta, \phi) = e^{+il\phi} C_l \sin^l \theta \quad \text{을 (식 ★) 에 대입.}$$

$$k = l - m, \quad m' = l, \quad f(\theta) = C_l \sin^l \theta \quad \text{임에 유의한다.}$$

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{j-m} Y_l^l(\theta, \phi) = C_l \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{j-m} e^{il\phi} \sin^l(\theta) = C_l e^{im\phi} \sin^{l-m}(\theta) \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m} [\sin^{2l}(\theta)]$$

$$C_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}} \quad \text{를 이용하면, 정말 식 (3.246) 이 나오는 걸 확인할 수 있다.}$$

Spherical harmonics 에 rotation 을 적용하면 어떻게 되나?

3.6.3 Spherical harmonics as rotation matrices

우리는 앞서 정의한 directional eigenket $|\hat{n}\rangle$ 을 $|\hat{z}\rangle$ 를 회전시켜서 얻고 싶다.

다음을 만족하는 $D(R)$ 을 구하고 싶다.

$$|\hat{n}\rangle = D(R) |\hat{z}\rangle$$

$|\hat{n}\rangle$ 이 (θ, ϕ) 에 해당한다고 치자.

$\hat{z}$ 축에 대해 θ 만큼 회전 하고, $\hat{z}$ 축에 대해 ϕ 만큼 회전 하는 과정이 $D(R)$ 이다.

$$D(R) = R_z(\phi) R_y(\theta)$$

모 밀러 각으로 나타내면,

$\hat{z}$ 축에 대해 ϕ 만큼 회전 하고, $\hat{y}'$ 축에 대해 θ 만큼 회전 하는 과정,

$\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0$ 이다.

$$D(R) = D(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)$$

항등 행렬 $\mathbb{1} = \sum_l \sum_m |l, m\rangle \langle l, m|$ 을 집어 넣자.

$$|\hat{n}\rangle = \sum_l \sum_m D(R) |l, m\rangle \langle l, m| \hat{z}\rangle$$

양변에 $\langle l, m'|$ 을 적용. $D(R)$ 의 행렬 표현을 얻는다.

$$\begin{aligned} \langle l', m' | \hat{n} \rangle &= \sum_m \langle l, m' | D(R) | l, m \rangle \langle l, m | \hat{z} \rangle \\ &= \sum_m D_{m'm}^l (\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0) \langle l, m | \hat{z} \rangle \end{aligned}$$

$|\hat{z}\rangle$ 는 $\theta = 0$ 에 해당한다.

따라서 $\langle l, m | \hat{z} \rangle$ 는 $Y_l^{m*}(\theta = 0, \phi = \text{undetermined})$ 에 해당.

$Y_l^m(\theta = 0)$ 은 $m \neq 0$ 일때 0 이다. $L_z |z\rangle = (y p_x - x p_y) |z\rangle = 0 |z\rangle$ 에서도 알 수 있듯.

$$\langle l, m | \hat{z} \rangle = Y_l^{m*}(\theta = 0, \phi = \text{undetermined}) \delta_{m0}$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \Big|_{\theta=0} \delta_{m0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(1) \delta_{m0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

원래 식에 대입.

$$Y_l^{m'*}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m'0}^l(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)$$

$$D_{m'0}^l(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^{m'*}(\theta, \phi)$$

특히 $m = 0$ 일때,

$$d_{00}^l(\beta) \Big|_{\beta=\theta} = P_l(\cos\theta)$$