

Announcement

final term 6/8 (Mon) 2:00 - 5:00

 $\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{S}$ 의 관계는 뭔가?

지난 노트에서 AI가 언급하기도 했지만, Sakurai 에서 정확하게 언급한다.

 $\mathcal{L}$ 과 $\mathcal{S}$ 는 l 정수/반정수 상태에 작용 하는, 연산 적용 대상이 배타적인 관계이다. $\mathcal{L}$ 은 고전적으로 관찰되는 회전을 일으키고, $\mathcal{S}$ 는 스핀이라는

양자적이고 "입자에 내재된" 상태를 만든다.

 $\mathcal{L}$ 과 $\mathcal{S}$ 의 합집합으로서, 양자적 영역까지 일반적인 rotation generator, 정확하게는 $[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k$ 의 commutation property를 가지는 연산자이다.따라서 이렇게 표현할 수 있다. $\mathcal{J} = \mathcal{L} + \mathcal{S}$ 더 엄밀하게는 이렇게 써야 한다. $\mathcal{J} = \mathcal{L} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{S}$ ⊗ 를 기준으로 왼쪽은 정수 l 을 가진 ket 이 연산되는 공간, 즉 position eigen ket 이 span 하는 공간이다.⊗ 오른쪽은 반정수 l 을 가진 ket 이 연산되는 공간, 즉 spin space 다.이에 따르면, 입자의 전체 상태는 orbital part (integer l) 와 spin part (half-integer l) 의 tensor product 로 나타내진다. $|\psi\rangle = |\psi_{orb}\rangle \otimes |\psi_{spin}\rangle$

$\mathcal{J}$ 이 generate 하는 회전 연산자도 이렇게 나타낼 수 있다.

$$D(R) = D_{orb}(R) \otimes D_{spin}(R) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \hat{n} \phi\right) \otimes \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \hat{n} \phi\right)$$

이제부터는 각운동량의 합과 Clebsch-Gordan Coefficients에 대해 배울 것이다.

간단한 예시로, 2개의 전자가 있는 시스템을 다루자.

두 연산자가 작용하는 공간은 독립적이기 때문에, 시스템 전체의 총 spin operator 역시 $\mathcal{J}$ 와 비슷한 방법으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}_2$$

$\mathbf{S}_1$ 은 첫번째 전자에 작용하는 spin operator,

$\mathbf{S}_2$ 는 두 번째 전자에 작용하는 spin operator 이다.

commutation relation 을 보자면,

$$[S_{1i}, S_{2j}] = 0, \quad [S_{1i}, S_{1j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_{1k}, \quad [S_{2i}, S_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_{2k}$$

이러면 total spin $\mathbf{S}$ 도 일반적인 spin operator의 commutation relation 을 만족한다. $[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$

proof.

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= [S_{1i} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes S_{2i}, S_{1j} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes S_{2j}] \\ &= [S_{1i} \otimes \mathbf{1}, S_{1j} \otimes \mathbf{1}] + \underbrace{[\mathbf{1} \otimes S_{2i}, S_{1j} \otimes \mathbf{1}]}_{=0} + [S_{1i} \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes S_{2j}] + \underbrace{[\mathbf{1} \otimes S_{2i}, \mathbf{1} \otimes S_{2j}]}_{=0} \\ &= [S_{1i}, S_{1j}] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [S_{2i}, S_{2j}] \\ &= i\hbar \epsilon_{ijk} (S_{1k} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes S_{2k}) \end{aligned}$$

operator 와 그의 eigen value 를 앞으로 이렇게 표현하겠다.

$$\begin{cases} S^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 & : S(S+1)\hbar^2 \\ S_z = S_{1z} + S_{2z} & : m\hbar \\ S_{1z} & : m_1\hbar \\ S_{2z} & : m_2\hbar \end{cases}$$

이때, 항상 $S = S_1 + S_2$ 는 아니라는 게 특징.

이때, 항상 $m = m_1 + m_2$ 인 것은 맞는 게 특징.

전체 시스템에 대한 ket 을 어떤 basis 를 이용해 나타낼 수 있을까?

simultaneous eigen state 는 서로 commute 하는 operator 들로 구성되어야 한다.

두 가지 basis 를 사용할 수 있다.

① S_{1z} 와 S_{2z} 에 대한 simultaneous eigen state

$$|m_1, m_2\rangle : |\uparrow\uparrow\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle \quad |\uparrow\downarrow\rangle \quad |\downarrow\uparrow\rangle$$

$\uparrow$ 는 $m = \frac{1}{2}\hbar$ 를, $\downarrow$ 는 $m = -\frac{1}{2}\hbar$ 를 나타냄.

② S^2 와 S_z 에 대한 simultaneous eigen state.

$$|S=1, m=\pm 1, 0\rangle, |S=0, m=0\rangle$$

여기서 singlet 과 triplet 개념이 나온다.

세 가지 상태(m 값)들이 있는 $|S=1, m=\pm 1, 0\rangle$ 들이 triplet 이고,

한 가지 상태만 있는 $|S=0, m=0\rangle$ 이 singlet 이다.

① 방식과 ② 방식의 eigen ket 은 당연히 one-to-one 으로 대응이 안 된다.

② 방식의 eigen kets 는 ① 방식 eigenkets 의 super position 이다.

$$\begin{cases} |S=1, m=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |S=1, m=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \\ |S=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{cases}$$

$$CG_{\text{matrix}} = \langle m_1, m_2 | S, m \rangle = \begin{pmatrix} | \uparrow \uparrow \rangle & | \uparrow \downarrow \rangle & | \downarrow \uparrow \rangle & | \downarrow \downarrow \rangle \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & |S=1, m=1\rangle \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & |S=1, m=0\rangle \\ 0 & 0 & 0 & 1 & |S=1, m=-1\rangle \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & |S=0, m=0\rangle \end{pmatrix}$$

① 방식과 ② 방식의 계수 변환 규칙이 바로 Clebsch-Gordan coefficients

이다. $\{m_1, m_2\}$ basis 와 $\{S, m\}$ basis 를 이어주는 matrix 다.

이 matrix 의 각 행에는 $\{S, m\}$ basis 의 한 가지 eigen ket 을 $\{m_1, m_2\}$ basis 로 나타낼 때 계수들이 나열되어 있다.

번 외로 교과서에 있는 연산자 관계식을 더 써보자면,

$$S_- = S_{1-} + S_{2-} = (S_{1x} + S_{2x}) - i(S_{1y} + S_{2y})$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} \rightarrow S_{1z}, S_{2z} \text{ 와 commute 하지 않는다.}$$

두 전자가 아니라, 서로 다른 j 와 m 값을 가진 두 입자의 total angular momentum 을 구하는 문제 (혹은 스핀을 가진 입자가 회전하는 상태) 로 일반화 해 보자.

Two angular momenta. $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ 둘은 독립적이며 commute 하다. $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$

state space: 두 종류 회전 각각의 ket 을 tensor product. $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \equiv |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

dimension: $(2j_1+1)(2j_2+1)$

commuting observables: $J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$

total angular momentum operator: $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, $J_z = J_{1z} + J_{2z}$

이때 쓸 수 있는 basis 는 무엇인가? 서로 commute 하는 operator 4개는 무엇인가?

① $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$ 의 simultaneous eigenket, $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

$$J_1^2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

$$J_{1z} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

$$J_2^2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

$$J_{2z} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

② J_1^2, J_2^2, J^2, J_z 의 simultaneous eigenket. $|j_1 j_2; j m\rangle$

$$J_1^2 |j_1 j_2; j m\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 j_2; j m\rangle$$

$$J_2^2 |j_1 j_2; j m\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_1 j_2; j m\rangle$$

$$J^2 |j_1 j_2; j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j_1 j_2; j m\rangle$$

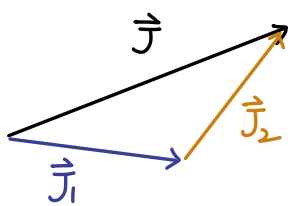
$$J_z |j_1 j_2; j m\rangle = \hbar m |j_1 j_2; j m\rangle$$

자연스럽게 이런 질문이 떠오른다.

1) j_1 과 j_2 가 정해져 있을 때 허용되는 j 값의 범위는 얼마인가?

2) $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$ 와 $|j_1 j_2; j m\rangle$ 사이의 변환 규칙은 얼마인가?

1) 에 대해, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ 를 3차원 벡터합처럼 생각해 보자.



그리고 j 를 벡터의 크기라고 순진하게 생각하면

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

두 가지 방식의 basis 에서, 양쪽의 차원이 (basis ket 의 개수) 가 같아야 한다.

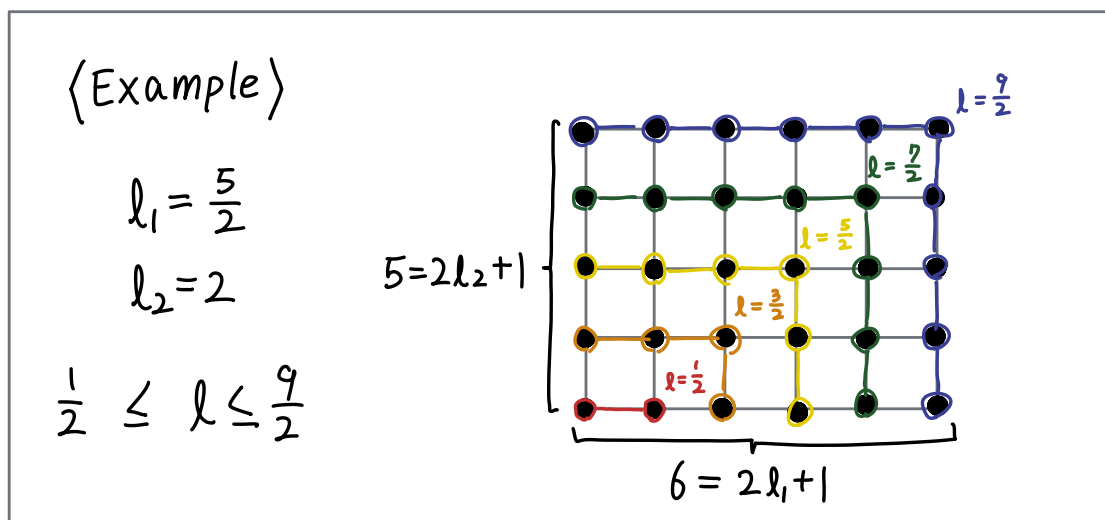
이를 통해 $|\dot{j}_1 - \dot{j}_2| \leq \dot{j} \leq \dot{j}_1 + \dot{j}_2$ 임을 더 확실하게 알 수 있다.

$\dot{j}_1$ 과 $\dot{j}_2$ 는 늘 정해진 값이라고 생각

$|\dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2\rangle$ 의 basis 개수: $\underbrace{(2\dot{j}_1 + 1)}_{-\dot{j}_1 \leq m_1 \leq \dot{j}_1} \underbrace{(2\dot{j}_2 + 1)}_{-\dot{j}_2 \leq m_2 \leq \dot{j}_2}$

$|\dot{j}_1 \dot{j}_2; \dot{j} m\rangle$ 의 basis 개수: $\sum_{|\dot{j}_1 - \dot{j}_2| = \dot{j}}^{\dot{j}_1 + \dot{j}_2} (2\dot{j} + 1)$

$$\begin{aligned} \text{풀어 보면, } \sum_{|\dot{j}_1 - \dot{j}_2| = \dot{j}}^{\dot{j}_1 + \dot{j}_2} (2\dot{j} + 1) &= \left\{ (\dot{j}_1 + \dot{j}_2) - |\dot{j}_1 - \dot{j}_2| + 1 \right\} \left\{ (\dot{j}_1 + \dot{j}_2) + |\dot{j}_1 - \dot{j}_2| + 1 \right\} \\ &= 2(\dot{j}_1 + \dot{j}_2) + (\dot{j}_1 + \dot{j}_2)^2 - |\dot{j}_1 - \dot{j}_2|^2 + 1 \\ &= 2\dot{j}_1 + 2\dot{j}_2 + (\dot{j}_1^2 + \dot{j}_2^2 + 2\dot{j}_1\dot{j}_2) - (\dot{j}_1^2 + \dot{j}_2^2 - 2\dot{j}_1\dot{j}_2) + 1 \\ &= 4\dot{j}_1\dot{j}_2 + 2\dot{j}_1 + 2\dot{j}_2 + 1 \\ &= (2\dot{j}_1 + 1)(2\dot{j}_2 + 1) \end{aligned}$$



$|\dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2\rangle$ 와 $|\dot{j}_1 \dot{j}_2; \dot{j} m\rangle$ 사이의 변환 규칙을 담은 게 앞서 말한 CG coefficient 이다.
 한 $|\dot{j}_1 \dot{j}_2; \dot{j} m\rangle$ 를 $|\dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2\rangle$ 의 supperposition 으로 나타낼 때 coefficient
 이므로, 이렇게 정의 된다.

$$CG_{\{j m\} \{m_1 m_2\}}: \langle \dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2 | \dot{j}_1 \dot{j}_2; \dot{j} m \rangle$$

$$\begin{aligned} |\dot{j}_1 \dot{j}_2; \dot{j} m\rangle &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} CG_{\{j m\} \{m_1 m_2\}} |\dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2\rangle \\ &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} |\dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2\rangle \langle \dot{j}_1 \dot{j}_2; m_1 m_2 | \dot{j}_1 \dot{j}_2; \dot{j} m \rangle \end{aligned}$$

CG에는 네 가지 규칙이 있다.

규칙 1 $m = m_1 + m_2$ 이어야 $CG = 0$

직관적으로 생각해봐도 당연하다. 각각운동량 보존.

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$ 로 생기는 특성

$$(J_z - J_{1z} - J_{2z}) |j_1 j_2 ; j m\rangle = 0$$

$$\langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | \underbrace{J_z - J_{1z} - J_{2z}}_{\substack{\text{hermitian 이니} \\ \text{bra 에 바로 적용}}} |j_1 j_2 ; j m\rangle = (m - m_1 - m_2) \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle = 0$$

$m = m_1 + m_2$ 가 아니면 $CG = 0$ 이어야 한다.

규칙 2 $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

앞서 증명함. 그런데 직관적인 설명은 뭐지?

규칙 3 Unitary 이어 convention 에 따라 real value

그래서 orthogonal. Basis transition matrix 이니 당연히 이래야 한다.

$$|j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle = \sum_j \sum_m |j_1 j_2 ; j m\rangle \langle j_1 j_2 ; j m | j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle$$

양변에 $\langle j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 |$ 을 취한다. Eigenket orthogonality 에 의해,

$$\langle j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 | j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle = \sum_j \sum_m \langle j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle \langle j_1 j_2 ; j m | j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle = \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2}$$

$|j_1 j_2 ; j m\rangle$ 도 비슷하게 orthogonality 를 적용

$$\langle j_1 j_2 ; j' m' | j_1 j_2 ; j m\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1 j_2 ; j' m' | j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle = \delta_{j' j} \delta_{m' m}$$

그리고 $|j_1 j_2 ; j m\rangle$ 의 normalization condition 에 의해,

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2 = m - m_1} |\langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle|^2 = 1$$

어떤 책은 표기법으로 Wigner's 3-J symbol 을 쓰기도 한다.

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j m\rangle = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

CG 를 찾는 법.

M 이 최대. 최소 인 $|j_1 j_2 ; j m\rangle$ 에서 부터 S_- 이나 S_+ 를 적용해
순서대로 나머지 $|j_1 j_2 ; j m\rangle$ 을 구한다.

간단한 예시로 전자 2개의 경우를 풀어보자.

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; j=1 m=1\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; m_1=\frac{1}{2} m_2=\frac{1}{2}\rangle \quad \text{이것은 } M=m_1+m_2 \text{ 규칙에 의해 확정된 것.}$$

$S_- = S_{1-} + S_{2-}$ 을 적용해 $|\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; j=1 m=0\rangle$ 의 CG를 찾자.

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; j=1 m=0\rangle &= \frac{S_- |\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; j=1 m=1\rangle}{\hbar \sqrt{(0+1)(1-0+1)}} \\ &= \frac{1}{\hbar \sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) |\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; m_1=\frac{1}{2} m_2=\frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; m_1=-\frac{1}{2} m_2=\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2} \frac{1}{2} ; m_1=\frac{1}{2} m_2=-\frac{1}{2}\rangle \right] \end{aligned}$$

이 결과가 아까 보았던 $|S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ 이 이거다.

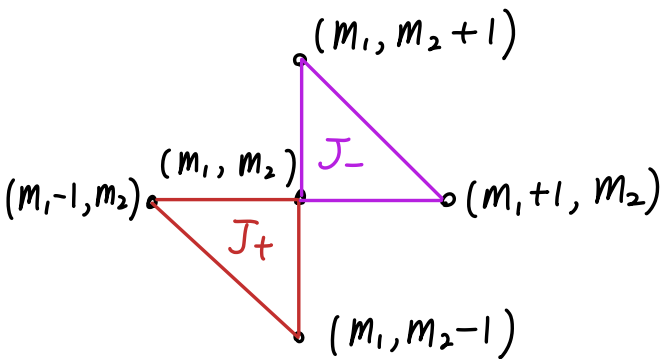
이 과정을 일반화 해보자.

$$\begin{aligned} J_{\pm} |j_1 j_2 ; j m\rangle &= \sum_{m'_1} \sum_{m'_2} (J_{1\pm} + J_{2\pm}) |j_1 j_2 ; m'_1 m'_2\rangle \langle j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle \\ &\quad \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j_1 j_2 ; j m \pm 1\rangle \\ &= \sum_{m'_1} \sum_{m'_2} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} |j_1 j_2 ; m'_1 \pm 1 m'_2\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} |j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 \pm 1\rangle \right\} \langle j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle \\ \text{양변에 } \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | \text{ 를 적용, 무변에서 orthogonality 에 의해} \\ \sum_{m'_1} \sum_{m'_2} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; m'_1 \pm 1 m'_2\rangle &= \delta_{m_1, m'_1 \pm 1} \delta_{m_2, m'_2} \\ \sum_{m'_1} \sum_{m'_2} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 \pm 1\rangle &= \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2 \pm 1} \\ \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m \pm 1\rangle \\ &= \sum_{m'_1} \sum_{m'_2} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} \delta_{m_1, m'_1 \pm 1} \delta_{m_2, m'_2} + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2 \pm 1} \right\} \langle j_1 j_2 ; m'_1 m'_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle \end{aligned}$$

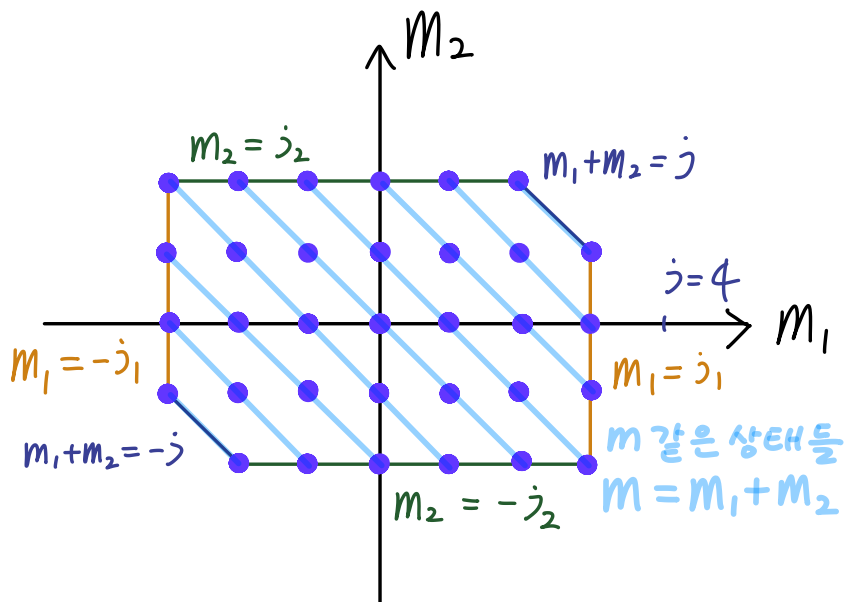
결과적으로 CG의 recursion relation을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \pm 1 \rangle \\ &= \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)} \delta_{m_1 m_1' \pm 1} \delta_{m_2 m_2'} + \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2' + 1)} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2' \pm 1} \right\} \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; j m \rangle \\ &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 \mp 1 | j_1 j_2; j m \rangle \end{aligned}$$

J_+ 로 이어진 관계는 $(m_1 - 1, m_2)$, $(m_1, m_2 - 1)$ 와 (m_1, m_2) 를 이어주고,
 J_- 로 이어진 관계는 $(m_1 + 1, m_2)$, $(m_1, m_2 + 1)$ 와 (m_1, m_2) 를 이어준다.



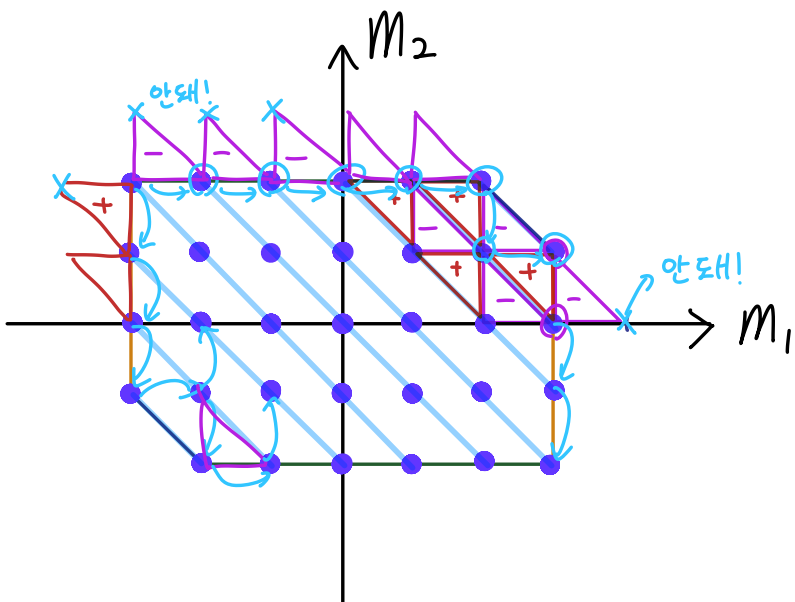
이 관계를 갈삼한 그림으로 그릴 수 있다.



recursion relation

유도에 쓰인 $J_{\pm}$ 는
 1 값을 바꾸지 않는 걸 유념.

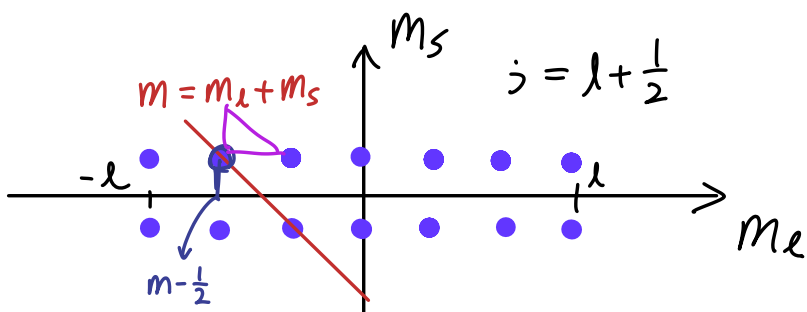
j, j_1, j_2 가 정해져 있을 때,
 가능한 (m_1, m_2) 상태와
 그에 따른 m 값을 그림처럼
 나타낼 수 있다.



Recursion relation을 적용하다 보면
 금지된 영역을 한점 걸치는 경우가 있다.

요령껏 변두리부터 답을 구하고
 내부로 마는 영역을 확장하면 된다.

예시로 l -orbital을 도는 전자를 풀어보자. $j = l \pm \frac{1}{2}$ 이 가능. $j = l + \frac{1}{2}$ 일때를 풀어보자.



임의의 m 에 대해,

$$\langle m_l = m - \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2} | j = l + \frac{1}{2}, m = m \rangle$$

부터 CG 찾기 시작.

J_- relation 을 쓰기 시작한다. 앞서 보았던 식,

$$\sqrt{(j+m)(j-m+1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m-1 \rangle$$

$$= \sqrt{(j_1+m_1+1)(j_1-m_1)} \langle j_1 j_2; m_1+1 m_2 | j_1 j_2; j m' \rangle + \sqrt{(j_2+m_2+1)(j_2-m_2)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2+1 | j_1 j_2; j m' \rangle$$

변 상황에 잘 대입, $m'-1 = m$, $m_1 = m - \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $j = l + \frac{1}{2}$

$$\sqrt{(l+\frac{1}{2}+m+1)(l+\frac{1}{2}-m)} \langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m \rangle = \sqrt{(l+m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{1}{2})} \langle m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m+1 \rangle$$

연쇄적으로 관계식을 적용

$$\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m \rangle = \frac{\sqrt{l+m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{l+m+\frac{3}{2}}} \langle m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m+1 \rangle$$

$$= \frac{\sqrt{l+m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{l+m+\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{l+m+\frac{3}{2}}}{\sqrt{l+m+\frac{5}{2}}} \langle m + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m+2 \rangle$$

$$\vdots$$

마지막에 $\langle l, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle$ 까지 다다르면?

$$\sqrt{2l+1} \langle l-1, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{2l} \langle l, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle$$

$$\langle l-1, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \rangle = \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} \langle l, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle$$

연쇄식에 적용하면 결국,

$$\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m \rangle = \frac{\sqrt{l+m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2l+1}} \langle l, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle$$

전체 Σ angular momentum 가 최소 인 상태는 두 basis 모두에서 하나의 basis ket 이다.

$$|j=l+\frac{1}{2}, m=l+\frac{1}{2}\rangle = |m_l=l, m_s=\frac{1}{2}\rangle$$

관측상 $\langle l, \frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \rangle = 1$ 이라고 둔다. 따라서

$$\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$$

이렇게 한 가지 CG 를 알아냈다. 그러나 우리 아직 모르는 게 산더미다.

$$\langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle, \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle, \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle$$

이 세 가지를 더 알아야 완전한 basis transform 을 할 수 있다.

그러나 일일이 찾지 않아도 된다. CG 의 orthogonality 를 이용하면 되기 때문
어떤 α 에 대해 다음 식이 만족한다.

$$\begin{pmatrix} \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle \\ \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1} = \frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}$$

$$\begin{pmatrix} \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle \\ \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \\ -\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \end{pmatrix}$$

이제 스핀과 오비탈을 전부 포함한 bound electron 의 상태를 일반식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} |l+\frac{1}{2}, m\rangle \\ |l-\frac{1}{2}, m\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, m \rangle \\ \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l-\frac{1}{2}, m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

이걸 spin - angular function 이라 부른다.

$$\begin{aligned}
 Y_{\ell}^{j=l \pm 1/2, m} &= \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{\ell}^{m-1/2}(\theta, \phi) \chi_{+} \\
 &+ \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{\ell}^{m+1/2}(\theta, \phi) \chi_{-} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y_{\ell}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y_{\ell}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

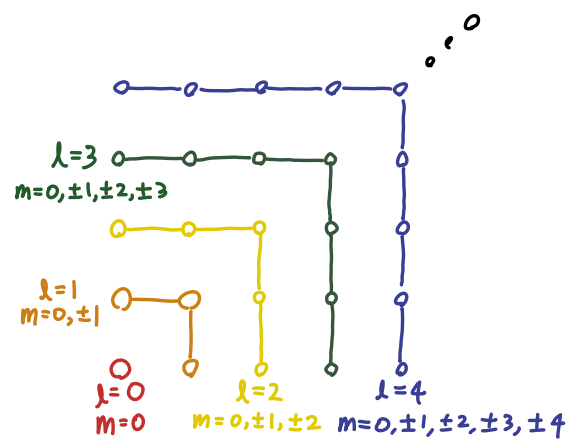
spin - angular function 은 L^2, S^2, J^2, J_z 의 eigenfunction 이다.

또한 $L \cdot S$ 의 eigen function 이기도 하나, 앞선 operator 와 독립적이지 않다. 왜냐하면 $L \cdot S = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2)$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2L \cdot S$$

Eigen value 도 쉽게 구할 수 있다.

$$\left(\frac{\hbar^2}{2}\right) \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] = \begin{cases} \frac{l\hbar^2}{2} & \text{for } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{(l+1)\hbar^2}{2} & \text{for } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$



사각수공식: $n^2 = \sum_{l=0}^{n-1} 2l+1$

$$(2j+1)^2 = \sum_{l=0}^{2j} 2l+1$$

j -spin의 2개의 독립적인 입자가 이루는 공간

$\rightarrow \bigoplus_{l=0}^{2j} l$ -spin의 1개 입자가 이루는공간