~~generator operator는 anti-Hermitian 이어야 한다.~~
~~그래서 generator = $-i$ · obeservable.~~

$T = \mathbb{1} + A\,dx.$

A는 antihermitian 이어야 한다. 상응하는 observable k 에 대해
$A = -ik.$

해밀톤 역학과 양자 역학은 어떻게 연결되는가?

equation of motion : $\dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$

canonical transform은 $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
이 성질을 그대로 유지하는 transform 이다.
$(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i).$
$\{Q_i, Q_j\} = 0$. $\{P_i, P_j\} = 0$. $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$.
canonical transform 이라면, equation of motion이 바뀌지 않는다.

$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t) \right)$
이것을 (Q_i, P_i)로 나타내어도 δS가 변치 않는다.

$H(q_i, p_i) \rightarrow H'(Q_i, P_i)$

$p_i \dot{q}_i - H = Q_i \dot{P}_i - H' + \dfrac{dF}{dt}.$

변환을 해도 시간에 대한 전미분 항 $\frac{dF}{dt}$만 추가될 뿐.

generator는 $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ 로의 전환을 만든다.
네 가지의 generating function을 생각하라.

$$\begin{cases} F_1(q, Q, t) \\ F_2(q, P, t) \\ F_3(p, Q, t) \\ F_4(p, P, t) \end{cases}$$

$F_2(q, P, t)$ 를 선택한다면,

$$dF_2 = +\frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt.$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \right) \qquad \cancel{K = \text{generator} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.}$$

$\rightarrow$ 이게 왜 F_2 에대해 성립하지?

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

예시) $F_2 = q_i P_i$ 이면 identity transformation 이다.

$$F_2(q, P, t) = q_i P_i + \varepsilon G(q, P, t)$$

G는 F_2 변환에 대한 generator.

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}.$$

$$\begin{cases} \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_i} \\ \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_i} \end{cases}$$

푸아송 괄호를 쓰면, $A(q, p)$ 에 대해

$$\delta A = \{A, G\} \qquad \begin{cases} \delta q_i = \varepsilon \{q_i, G\} = \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_i} \\ \delta p_i = \varepsilon \{p_i, G\} = -\varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_i} \end{cases}$$

예시) infinitesimal space translation.

$$Q = q + \varepsilon, \quad P = p$$

$$\delta q = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} = \varepsilon, \qquad \delta p = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} = 0$$

$$G = p.$$

양자에서 space translation operator는 $T(dx) = \mathbb{1} - i\frac{1}{\hbar} p \cdot dx$

변수와 generator 사이 관계로 인해,

$[x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$ 가 나오는 것이다.

[변수$_i$, 그것의 generator$_j$] $= i\,\delta_{ij}$

position basis 에서 momentum operator.

$$T(dx') = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} p\, dx'.$$

$$|\alpha'\rangle = \int (\langle x'|\alpha'\rangle)\, |x'\rangle\, dx'$$

$$T(dx')\,|\alpha'\rangle = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} p\, dx'\right)|\alpha'\rangle$$

$$= \int T(dx')|x'\rangle\langle x'|\alpha'\rangle\, dx'$$

나중에 직접 유도해보기.

$$= \int |x'+dx'\rangle\langle x'|\alpha'\rangle\, dx'$$

중간에 $\psi(x'-dx')$

테일러전개하면 된다.

$\psi(x') - \frac{\partial\psi}{\partial x} dx'.$

$$= \int \left(\langle x'|\alpha'\rangle - \frac{i}{\hbar} p\,dx \langle x'|\alpha'\rangle\right)|\alpha'\rangle\, dx.$$

p를 operator로서 x-basis 에서 matrix로 나타내면,

$$\langle x'|p|x''\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'}\delta(x'-x'')$$

$$\langle\beta|p|\alpha\rangle = \int dx' \langle\beta|x'\rangle\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\right)$$

$$= \int dx'' \int dx' \langle\beta|x'\rangle\langle x'|p|x''\rangle\langle x''|\alpha\rangle$$

$$= \int dx'' \int dx'\, \psi_\beta^*(x')\left(-i\hbar\,\delta(x'-x'')\frac{\partial}{\partial x'}\right)\psi_\alpha(x'')$$

$$= \int dx'\, \psi_\beta^*(x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\psi_\alpha(x')\right)$$

$$= -i\hbar \int dx'\, \psi_\beta^*(x')\frac{\partial\psi_\alpha(x')}{\partial x}.$$

Infinitesimal translation 을 여러번 하면 어떨까?

$$T(\Delta x) = \lim_{N\to\infty}\left(T\left(\frac{\Delta x}{N}\right)\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 - i\frac{p_x}{\hbar}\frac{\Delta x}{N}\right)^N.$$
$$= \exp\left(-i\frac{p_x}{\hbar}\Delta x\right).$$

그냥 테일러 전개가 아니라, 이렇게 Translation operator 를 exponential 꼴로 나타내는 걸 정당화 할 수 있다.

Translation operator 는 commut 해야 한다.

어떤 변환을 어떤 순서로 하든 결과는 같아야 하므로,

→ 이건 generator 가 commute 한 경우에 가능하다.

$$[T(\Delta y\hat{y}), T(\Delta x\hat{x})]$$
$$= \left[\left(1 - \frac{i}{\hbar}p_y\Delta y\right), \left(1 - \frac{i}{\hbar}p_x\Delta x\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{\hbar^2}\Delta x\Delta y[p_y, p_x] = 0.$$

그들의 generator 들이 commut 하는 translation의 group을 Abelian 이라 한다.

운동량 보존? → space translation은 momentum eiget ket 에 취해도 변치 않는다.

$$T(dx)|p'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}p'dx\right)|p'\rangle \simeq |p'\rangle.$$

디랙의 발견. 푸아송 괄호를 commutator 로 바꾸면 양자화된다.

$$\{\cdot,\cdot\} \rightarrow -i\frac{1}{\hbar}[\cdot,\cdot]$$

질문) $\frac{1}{pq}$ 과 $\frac{1}{\hbar}$ 의 차원이 같나? 그렇네 다 $\frac{1}{\text{에너지}}$

푸아송 괄호가 가지는 성질을 commutator 또한 가진다.

이제 함수를 momentum space 에서 보자.

$$|\alpha\rangle = \int dp' \, |p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle = \int dp' \, \phi_\alpha(p') \, |p'\rangle$$

$$\int dp' \, |\phi_\alpha(p')|^2 = 1.$$

$\psi_\alpha(x')$ 를 $\phi_\alpha(p')$ 로 바꿔보자.

$$U_l|x^l\rangle = |p^l\rangle. \qquad U_l = |p^l\rangle\langle x^l|.$$

$\langle x^m|U|x^l\rangle = \langle x^m|p^l\rangle$ 이게 transformation function 역할을 한다.

→ x의 basis 에서 적분할 때 이 함수를 활용

$$\langle x'|p|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x'|\alpha\rangle$$

$|\alpha\rangle = |p'\rangle$ 라고 두면,

$$\langle x'|p|p'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x'|p'\rangle = p'\langle x'|p'\rangle.$$

$\langle x'|p'\rangle$ 에 대한 미분방정식, $\langle x'|p'\rangle = N\exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right)$

N 은 어떤 값일까?

$$\langle x'|x''\rangle = \delta(x'-x'') = \int dp' \, \langle x'|p'\rangle\langle p'|x''\rangle$$

$$= |N|^2 \int dp' \, \exp\left(\frac{ip'(x'-x'')}{\hbar}\right)$$

$$= |N|^2 \, 2\pi\hbar \, \delta(x'-x'').$$

$$|N|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$\langle x'|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right).$$

$$\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle = \cancel{\int p' \langle x'\rangle}$$

$$= \int dp' \langle x'|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle$$

$$= \int dp' \, \phi_\alpha(p') \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right).$$

$$\langle p'|x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right).$$

$$\phi_\alpha(p') = \int dx' \langle p'|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= \int dx' \, \psi_\alpha(x') \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right)$$