슈뢰딩거의 방식과 하이젠베르크의 방식을 비교하자.

time evolution 이 unitary operator 라는 점을 이용.

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{time} \mathcal{U}|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \rightarrow (\langle\beta|\mathcal{U}^{+}X\mathcal{U}|\alpha\rangle = \langle\beta|(\mathcal{U}^{+}X\mathcal{U})|\alpha\rangle$$

슈뢰딩거의 방식은 S로, 하이젠베르크는 H로 나타냄.

$$A^{H}_{(t)} = \mathcal{U}^{+} A^{S}_{(t)} \mathcal{U}.$$ $\mathcal{U}$는 $t=0$ 에서 t로 이동시킴.

$t=0$ 라면 $A^{H} = A^{S}$

$t>0$ 이면,
$$\begin{cases} |\alpha,t\rangle^{H} = |\alpha,0\rangle \\ |\alpha,t\rangle^{S} = \mathcal{U}|\alpha,0\rangle. \end{cases}$$

expectation value는 누구의 관점을 쓰든 똑같다.

$$\langle\alpha,t|^{S}A^{S}|\alpha,t\rangle^{S} = \langle\alpha,0|\mathcal{U}^{+}A^{S}\mathcal{U}|\alpha,0\rangle$$

$$\langle\alpha,t|^{H}A^{H}|\alpha,t\rangle^{H} = \langle\alpha,0|\mathcal{U}^{+}A^{S}\mathcal{U}|\alpha,0\rangle$$

해밀토니안이 시간에 불변. $\mathcal{U}(t,0) = \exp(-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}t)$

$$A^{H}(t) = \exp(i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}t)\, A^{S}(0)\, \exp(-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}t)$$

$$\frac{\partial A^{H}}{\partial t}(t) = (i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H})A^{H} - A^{H}(i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H})$$
$$= i\frac{1}{\hbar}[\mathcal{H},A^{H}] = \frac{1}{i\hbar}[A^{H},\mathcal{H}]$$

이것이 Heisenberg 의 equation of motion.

유용한 특성.

$$\boxed{\begin{aligned} &[x,p] = i\hbar \\ &[x_i, F(p)] = i\hbar\frac{\partial F}{\partial p} \\ &[p_i, G(x)] = -i\hbar\frac{\partial G}{\partial x} \end{aligned}}$$

A^{H}가 $\mathcal{H}$와 commut하면, 그 A는 constant of motion이다.

예시) $$\frac{\partial x^{H}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[x,\mathcal{H}] = \frac{1}{i\hbar}[x, \frac{p^2}{2m} - V(x)] = \frac{1}{2mi\hbar}[x,p^2]$$

→ 이 성질은 $[x,p^n]$을 recurrent하게 찾으며 증명할 수 있고,
아니면 푸아송 괄호와의 관계를 이용해도 된다.

$$\frac{\partial x^{H}}{\partial t} = \frac{1}{2mi\hbar}(i\hbar\, 2p) = \frac{1}{m}.$$

$$\frac{\partial x^{H}}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{\partial p^{H}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}$$ 푸아송 괄호의 특징 그대로!

예시

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \sum a_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j$$

$$\frac{\partial x_i}{dt} = \frac{i\hbar}{i\hbar}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p_i}{m}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}V$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{dx_i}{dt}, \mathcal{H}\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{1}{m}p_i, \mathcal{H}\right] = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_i}V(x)$$

하이젠베르크의 관점은 완전 고전역학과 같다.

$$m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\nabla V$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x_i\rangle = -\nabla\langle V(x)\rangle = \frac{d}{dt}\langle p_i\rangle$$

↳ 이렇게 시간 미분을 ⟨ ⟩ 밖으로 막 꺼내도 되는가?

Base ket는 하이젠베르크의 관점에서 어떻게 되는가?

Obserbuble이 시간에 대해 바뀌므로, eigen base 또한 시간에 따라 달라짐.

at $t=0$, $|a'\rangle^H = |a'\rangle^S$

$t>0$ $\quad |a'\rangle^H = \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle^S = \mathcal{U}^\dagger |a',0\rangle^H$.

증명, $\quad \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger |a'\rangle^S = \mathcal{U}^\dagger a' |a'\rangle^S$

$= A^H \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle^S$

$= a' |a',t\rangle^H$.

~~A가 시간 진화하는 방향과 반~~

슈뢰딩거 픽쳐에서 ket이 시간 진화하는 것과 반대 방향으로

하이젠베르크 픽쳐에서 base ket이 변화한다.

$$A^H(t) = \sum_{a'} |a',t\rangle^H a'_H \langle a',t|^H$$

$$= \sum_{a'} \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle^S a'_H \langle a'|^S \mathcal{U}$$

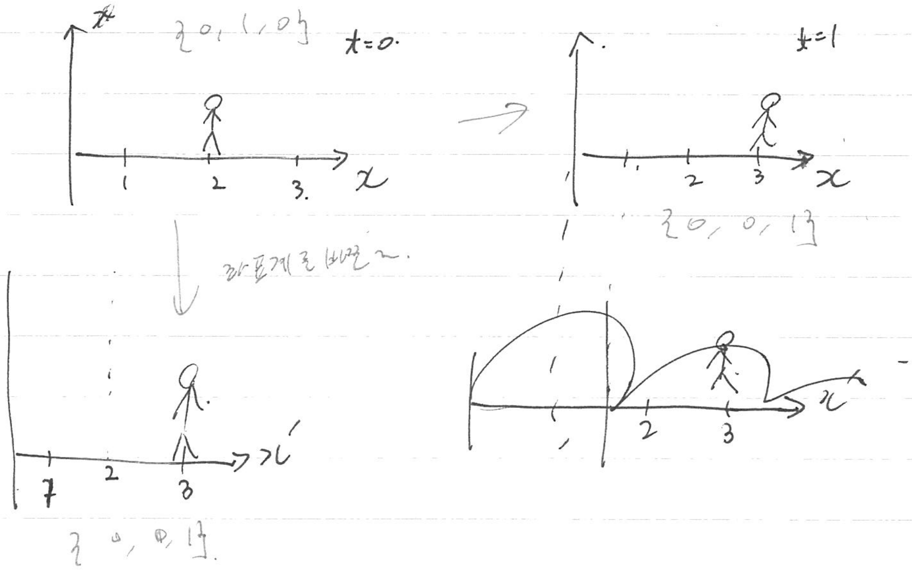
$$= \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U}.$$

$C_{a'}(t) = \langle a'|\alpha,t\rangle = \cancel{\langle \text{base}\ \mathcal{U}|\alpha,0\rangle}\ \langle a'|\mathcal{U}|\alpha,0\rangle$

$= \langle a'|\mathcal{U}|\alpha,0\rangle$

$= (\mathcal{U}^\dagger|a'\rangle)^\dagger |\alpha,0\rangle$

active transform과 passive transform의 비유.



물체의 위치가 바뀐다.

active transform이나

하이젠베르크 관점에서 ket이 시간이 지나도 동일하다

→ $t=0$ 에서 eigenket을 basis로 사용했을 때 coefficient 가 동일하다.

Simple harmonic oscillator.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + m\omega^2 x^2 \frac{1}{2}$$

※ 내림 연산자를 a, 올림 연산자를 $a^\dagger$ 라고 쓴다.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar}\left(-i[x,p] + i[p,x]\right) = 1$$

number operator.

$$N = a^\dagger a = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right) + \frac{i}{2\hbar}[x,p] = \frac{\mathcal{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{H} = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

equation of motion

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p^H = \dfrac{1}{i\hbar}[p^H, \mathcal{H}] = -m\omega^2 x. \\[2ex] \dfrac{d}{dt}x^H = \dfrac{p}{m} \end{cases}$$

이 두 equation of motion은 coupling. → 풀기 어렵 ~

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{i}{m\omega}\frac{dp}{dt}\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{p}{m} + \frac{i}{m\omega}(-m\omega^2)x\right)$$

$$= -i\omega a.$$

$$\frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger$$

a와 $a^\dagger$에 대한 미방은 uncoupled.

$$\begin{cases} a = e^{-i\omega t} a_0 \\ a^\dagger = e^{i\omega t} a_0^\dagger. \end{cases} \qquad N(t) = a^\dagger(t)\, a(t) = |a_0|^2$$

이는 해밀토니안의 보존량임을 의미.

$$a(t) \propto x(t) + \frac{i}{m\omega} p(t) = x_0 e^{-i\omega t} + \frac{i p_0}{m\omega} e^{-i\omega t}.$$

$$a^\dagger(t) \propto x(t) - \frac{i}{m\omega} p(t) = x_0 e^{i\omega t} - i \frac{p_0}{m\omega} e^{i\omega t}.$$

두 식을 더하고 빼서 x와 p에 대해 정리.

직접 계산해 보기

$$x(t) =$$

$$p(t) =$$

다른 방법으로 풀 수 있다. 슈뢰딩거의 관점으로 풀자.

$$x^H(t) = \exp\left(i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}t\right) x^S \exp\left(-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}t\right)$$

Baker - hausdorff lemma.

G가 hermitian, λ가 실수일 때,

$$\exp(iG\lambda) A \exp(-iG\lambda) = A + i\lambda[G,A] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}\right)[G,[G,A]] \cdots + \left(\frac{i^n\lambda^n}{n!}\right)[G,[G,[\cdots[G,A]]\cdots]]$$

$$x^H(t) = x_0 + i\frac{t}{\hbar}[\mathcal{H}, x_0] + \left(\frac{i^2t^2}{2!\hbar^2}\right)[\mathcal{H},[\mathcal{H},x_0]]$$

$$[\mathcal{H}, x_0] = -i\hbar\frac{p_0}{m}, \qquad [\mathcal{H}, p_0] = i\hbar m\omega^2 x_0.$$

$$x^H(t) = x_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2!}t^2\omega^2 x_0 \quad \cdots$$

x_0에 대한 항만 모으면. 짝수 t, $\cos t$가 나옴.

$$x^H(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t.$$