$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A^H, H]$$ Ladder operator에 하이젠베르크 방식을 도입하고

$\dot{a}(t) = \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}]$ 과 $\dot{a}^\dagger(t) = \frac{1}{i\hbar}[a^\dagger, \mathcal{H}]$ 을 풀면, 이것들이 시간이 지나도 phase만 바뀜.

$$a^H(t) = a^H(0)\, e^{-i\omega t} \qquad a^{\dagger H}(t) = a^{\dagger(H)}(0)\, e^{i\omega t}.$$

$$\begin{cases} x^H(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t \\ p^H(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega(\sin\omega t)\, x(0). \end{cases}$$

→ 이것들은 아래식으로 구함

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$
$$p = i\sqrt{\tfrac{1}{2}\hbar\omega m}\,(a^\dagger - a)$$

$N = a^\dagger a \qquad [a, a^\dagger] = 1 \qquad [N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger[a,a] + [a^\dagger, a]a = -a.$

$aa^\dagger = N + 1 \qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger$

$$Na^\dagger = [N, a^\dagger] + a^\dagger N = a^\dagger + a^\dagger N, \quad Na^\dagger|n\rangle = (a^\dagger + a^\dagger N)|n\rangle$$
$$= (1+N)a^\dagger|n\rangle$$

비슷하게, $Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$ 이를통해 $a^\dagger|n\rangle$과 $a|n\rangle$모두 N의 eigenket 임을 알 수 있다.

따라서, $a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle \qquad a|n\rangle \propto |n-1\rangle$

비례 상수는 무엇인가? $a|n\rangle = C|n-1\rangle$이라 두고, C를 찾아보자. normalization을 이용.

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = |C|^2\langle n-1|n-1\rangle = |C|^2 = \langle n|N|n\rangle = n.$$

$\therefore C = \sqrt{n}$. 비슷한 방식으로 구하면, $a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$의 비례상수는 $\sqrt{n+1}$ 이다.

$$\therefore a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$ 두 상태 중 높은 번호의 $\sqrt{\ }$가 계수로. 변환 전후.

a를 계속 적용해서 상태를 끝도 없이 내릴 수 있다면 안 된다! 때문에 n은 0을 포함한 양의 정수여야 한다. Truncation이 필요하다는 이야기. 이 조건을 만족하면, 처음 시작한 상태가 $|m\rangle$일 때, a를 계속 적용하다 보면 m번째에서 ket 앞에 $\sqrt{m-m} = 0$이 곱해질 것이다. $n=0$인 바닥은 말 그대로 ground state라 부르고, 높은 $|n\rangle$은 어떻게 생겼나? 바닥 상태 $|0\rangle$부터 차곡차곡 타고 올라와 찾으면 된다.

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}a^\dagger|n-1\rangle, \quad |1\rangle = a^\dagger|0\rangle, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^\dagger|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2|0\rangle \ \cdots$$
$$\therefore |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$$

$|n\rangle$ basis에서 a와 $a^\dagger$의 matrix는 어떻게 생겼을까?

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n'|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} \ \Big/\ \langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle n'|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}$$

$|n\rangle$ basis에서 x와 p는 어떻게 생겼나?

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle n'|a|n\rangle + \langle n'|a^\dagger|n\rangle\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right)$$
$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\tfrac{1}{2}\hbar m\omega}\left[\langle n'|a^\dagger|n\rangle - \langle n'|a|n\rangle\right] = i\sqrt{\tfrac{1}{2}\hbar m\omega}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} - \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}\right)$$

x와 p에는 diagonal term이 없다. 에너지 eigenstate 들에게 $\langle x\rangle$와 $\langle p\rangle$는 모두 0.

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a\right)$$

$|n\rangle$ 에서 $\langle x^2\rangle$은 얼마일까?

$$\langle x^2\rangle_n = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\langle n|aa^\dagger|n\rangle + \langle n|a^\dagger a|n\rangle\right]$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\sqrt{n+1})^2\langle n+1|n+1\rangle + (\sqrt{n})^2\langle n-1|n-1\rangle\right]$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) =$$

비슷하게, 운동량에 대해서도 구하면,

$$\langle p^2\rangle_n = \frac{1}{2}\hbar\omega m(2n+1)$$

에너지 중 운동에너지와 포텐셜 에너지의 양을 비교해 보면, 둘이 똑같다!

energy eigenstate는 운동에너지와 포텐셜에너지를 동등하게 나누어 갖는다.

$$\frac{1}{2m}\langle p^2\rangle_n = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle_n = \frac{1}{4}\hbar\omega(2n+1) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\langle H\rangle_n.$$

불확정성 원리를 확인해 보자.

$$\langle x^2\rangle_n\langle p^2\rangle_n = \hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

$\psi_n(x)$는 어떻게 생겼을까? $\langle x'|a|0\rangle$를 구해보자. $a|0\rangle=0$ 이므로, 답은 정해져 있다.

$$\langle x'|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x'|x + \frac{ip}{m\omega}|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x' + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x'|0\rangle = 0$$

간단하게 $x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$, $\psi_0(x') = \langle x'|0\rangle$

$\left(x' + x_0^2\frac{d}{dx'}\right)\psi_0(x') = 0$ 이 방정식을 풀면 가우시안이 나온다. 풀기 쉽다.

normalization 까지 하면, $\psi_0(x') = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}}\exp\left(-\left(\frac{x'}{2x_0}\right)^2\right)$

$$\langle x'|1\rangle = \langle x'|a^\dagger|0\rangle = \frac{1}{x_0\sqrt{2}}\left(x' - x_0^2\frac{d}{dx'}\right)\psi_0 = \psi_1$$

이렇게 raising operator를 쓰다보면, ψ_n을 모두 구할 수 있다.

expectation value가 고전적인 harmonic oscillator로 움직이는 상태가 있을까? 거기다 wave packet이 모양이 유지되는 상태, 그리고 uncertainty가 최소가 되는 상태가 있을까? 이는 실존하며 coherent state 라고 부른다. 이를 $|\psi\rangle$ 라고 두면,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \qquad |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\frac{1}{\hbar}E_n t}|n\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^{n} c_n \exp\left(-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)|n\rangle$$

coherent state의 정의 $\longrightarrow$ a에 대한 eigen state.

$|\lambda\rangle$ 라고 부르고, $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

그리고 $|\lambda\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$

c_n을 찾자.

$$a|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle$$

위는 $\lambda|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda |n\rangle$ 과 같다.

그래서 C_n 에 대한 재귀식을 구할 수 있다. $C_{n+1}\sqrt{n+1} = \lambda C_n$.

$$C_{n+1} = \frac{(\lambda)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} C_0 \quad , \quad C_n = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} C_0 .$$

C_0 를 정하기 위해 normalization.

$$1 = \langle \lambda | \lambda \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{n!} = |C_0|^2 \exp(\lambda^2)$$

λ 가 복소수인 것 까지 고려한다면, $|C_0|^2 = \exp(-|\lambda|^2)$.

Time evolution of coherent state.

coherent state는 a의 eigenstate 이므로,

time evolution해도 phase만 바뀌지 expectation value는 바뀌지 않음.

$a^H(t) = e^{-i\omega t} a^H(0)$ 을 이용,

$$\begin{aligned} a|\lambda(t)\rangle = a\,\mathcal{U}|\lambda\rangle &= \mathcal{U}\,\mathcal{U}^\dagger a\,\mathcal{U}|\lambda\rangle = \mathcal{U}\,a^H(t)\,|\lambda\rangle \\ &= e^{-i\omega t}\,\mathcal{U}\,a^H(0)|\lambda\rangle \\ &= \lambda e^{-i\omega t}\,\mathcal{U}|\lambda\rangle \\ &= \lambda e^{-i\omega t}\,|\lambda(t)\rangle \end{aligned}$$

$\therefore\ a|\lambda(t)\rangle = \lambda e^{-i\omega t}|\lambda(t)\rangle$

$|\lambda(t)\rangle$ 는 $|\lambda(0)\rangle$ 와 phase만 다른 eigenvalue를 내놓는다.

아까 λ를 복소수라고 가정해 둔 게 이런 의미를 가지고 있었다.

$|\lambda(t)\rangle$의 $\langle x\rangle$ 와 $\langle p\rangle$ 를 구해보자. 과연 고전적으로 진동할지?

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \quad , \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^\dagger - a) \qquad \text{이용.}$$

참고.
당연히, $|\lambda\rangle$는 $a^\dagger$의 eigen vector가 아니다.
$a^\dagger|\lambda\rangle =$

$$\langle x\rangle^{\lambda}_{t} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle\lambda|a|\lambda\rangle + \langle\lambda|a^\dagger|\lambda\rangle\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\lambda_{(t)} + \lambda^*_{(t)}\right).$$

$$\langle p\rangle^{\lambda}_{t} = i\sqrt{\tfrac{1}{2}m\hbar\omega}\left(\lambda^*(t) - \lambda(t)\right).$$

$\lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t}$ 를 넣자. 그러면

$$\langle x\rangle_\lambda = x_0 \cos(\omega t) \qquad \langle p\rangle_\lambda = p_0 \sin(\omega t).$$

내친 김에 $\langle x^2\rangle$ 과 $\langle p^2\rangle$ 도 계산하자. $\langle\lambda|aa^\dagger|\lambda\rangle = \langle\lambda|1 + a^\dagger a|\lambda\rangle$ 이용.

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + 1)$$

$$p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}(a^2 + a^{\dagger 2} - 2a^\dagger a - 1)$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\lambda^2 + \lambda^{*2} + 2|\lambda|^2 + 1\right) \qquad \langle p^2\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}\left(\lambda^2 + \lambda^{*2} - 2|\lambda|^2 - 1\right)\times(-1)$$

$$\langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\lambda+\lambda^*)(\lambda^*+\lambda) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\lambda^2+\lambda^{*2}+2|\lambda|^2\right]$$

$$\langle p\rangle^2 = \left[i\sqrt{\tfrac{1}{2}m\hbar\omega}\,(\lambda^*-\lambda)\right]\left[i\sqrt{\tfrac{1}{2}m\hbar\omega}\,(\lambda^*-\lambda)\right]^* = \frac{1}{2}m\hbar\omega(\lambda^*-\lambda)(\lambda-\lambda^*)$$

$$= -\frac{1}{2}m\hbar\omega\left(\lambda^2+\lambda^{*2}-2|\lambda|^2\right)$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{1}{2}m\hbar\omega.$$

$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2,$ 최소의 uncertainty를 가짐. 고전에 근접했단 의미.

⊕ $\lambda = 0$ 인 coherent state는 바로 에너지 ground state이다.

$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$ 라는 무차원 변수로 coherent state를 나타내면 .

$$\psi_\lambda(\xi) = C'\exp\left(-\frac{1}{2}(\xi-\sqrt{2}\lambda)^2\right)$$

즉, ⊕ 평균이 이동한 Gaussian distribution을 가진다.

질문). λ는 아무 복소수나 가능한가?