QM week 7-1.

propagator 가 Green function 에 대해 general 하게 쓰이는 용어인가?

다른 미분방정식에도 propagator 라는 이름을 쓰나?

파인만 경로 적분을 이어 공부

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{\omega(\Delta t)} \exp\left(\frac{i S(n, n-1)}{\hbar} \right).$$

$\frac{1}{\omega(\Delta t)}$ 이 포텐셜에 영향 받지 않는다.

$(x_n, t_n) \to (x_{n-1}, t_{n-1})$ 는 직선 등속운동경로라고 근사.

Δt 는 아주 작다 근사.

$$S(n, n-1) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] = \Delta t \left[\frac{m}{2} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t^2} - V\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right) \right]$$

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{\omega(\Delta t)} \exp\left[\frac{i \Delta t}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t^2} - V\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{V} \right) \right) \right]$$

포텐셜 항은 Δt 에 1차항이다. $\exp\left(i \frac{V \Delta t}{\hbar} \right) \simeq 1$.

그래서 $\omega(\Delta t)$ 는 kinetic term 만 영향을 끼친다.

그럼 $\omega(\Delta t)$ 는 뭘까?

free propagator 에서 아래와 같이 구했으므로, 비교하면 된다.

$$K(x_N, t_N ; x_1, t_1) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_N - t_1)}} \exp\left(\frac{i m (x_N - x_1)^2}{2\hbar (t_N - t_1)} \right).$$

아니면 직접 적분하고 normalizatin condition 을 쓰면 된다.

$$\langle x_n t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \Big|_{t_n = t_{n-1}} = \delta(x_n - x_{n-1}).$$

$t \to t_{n-1}$, $\delta t \to 0$ 이면 가우시안이었던 게 디랙델타가 된다.

$\xi = x_N - x_{n-1}$ 으로 두고 가우시안 적분.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{i m \xi^2}{2\hbar \Delta t} \right) = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}} = \omega(\Delta t).$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left(\frac{i m \xi^2}{2\hbar \Delta t} \right) = \delta(\xi).$$

어라? 이 극한에서 2π 는 어떻게 관여하는지 알 필요가 있다.

$$\langle x_N t_N | x_1 t_1 \rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \int dx_{N-1} \cdots \int dx_2 \prod_{n=2}^{N} \exp\left(\frac{i S(n,n-1)}{\hbar} \right)$$

경로 적분을 정의

$$\int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}(x(t)) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \int dx_{N-1} \cdots \int dx_2$$

$$\langle x_N t_N | x_1 t_1 \rangle = \int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}(x(t)) \exp\left[i \int_{t_1}^{t_N} dt \frac{L_{cl}(x,\dot{x})}{\hbar} \right]$$

파인만의 경로 적분이 슈뢰딩거 방정식과 같다는 걸 보이자

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int dx_{N-1} \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_N - x_{N-1})^2}{\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right] \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle$$

$$\langle x, t+\Delta t | x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right) \langle x-\xi, t | x_1, t_1 \rangle$$

Δt가 작으니, 이걸로 테일러 전개.

$$\langle x, t+\Delta t | x_1, t_1 \rangle = \langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x, t \rangle$$

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} \right) \left(1 - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right)$$

포텐셜 항은 1차까지 테전.

$$\times \left[\langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \langle x, t | x_1, t \rangle + \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x, t \rangle \right]$$

제거?

$\langle x-\xi, t | x_1, t_1 \rangle$을 ξ에 대해 2차까지 테전.

다 전개하며, 적분까지 하면

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar\Delta t}{m} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle$$

$$- \frac{i}{\hbar} \Delta t \, V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle$$

포텐셜과 게이지 변환.

constant potential → 포텐셜에 상수가 더해지면 양자에서는 phase만 바뀌고, expactation value는 바뀌지 않는다.
고전 역학에서도 해당 되었던 이야기.

$\mathcal{H} \to \cancel{\mathcal{H}' + V_0}$. $\quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + V_0$

상수 V_0를 더한 해밀토니안 $\mathcal{H}'$를 생각.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathcal{H}\psi \quad \rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\mathcal{H}')\psi' = (\mathcal{H} + V_0)\psi'$$

$$\psi'_{(t)} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}t(\mathcal{H} + V_0)\right)\psi_0' = e^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}\psi_0$$

$$\psi_{(t)} = \exp\left(-t\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\right)\psi_0$$

→ 이게 맞나?

$\psi_0' = \psi_0$ 라는 전제 하.

Gauge transform

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2 + e\phi$$
$$= \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P}^2 - \frac{e}{c}\mathbb{P}\mathbb{A} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\mathbb{P} + \frac{e^2}{c^2}\mathbb{A}^2\right) + e\phi$$

로 effective momentum이 $\mathbb{P} - \frac{e}{c}\mathbb{A}$ 가 되었던 거지.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\left\{\left[x, \frac{\mathbb{P}^2}{2m}\right] - \frac{e}{c}\cdot\frac{1}{2m}[x, \mathbb{P}\mathbb{A}] - \frac{e}{c}\frac{1}{2m}[x, \mathbb{A}\mathbb{P}] + \frac{e^2}{2mc^2}[x, \mathbb{A}^2]\right\}$$

이거 계산 어케됨?

$$= \frac{p_i}{m} + \frac{1}{m}\frac{e}{c}A_i$$

p: canonical momentum. $\quad \pi = m\frac{d\mathbb{x}}{dt} = \mathbb{P} - \frac{e}{c}\mathbb{A}$.

π가 바로 mechanical momentum.

$\mathbb{P}$는 게이지 가변인데, π는 게이지 불변이다.

$$[\pi_i, \pi_j] = \frac{i\hbar e}{c}\varepsilon_{ijk}B_k$$

→ 직접 계산해 보기.

이런 commutation 결과로 인해, 로렌츠힘이 성립한다.

$$\mathcal{H} = \frac{\pi^2}{2m} + e\phi$$

$$m\frac{d^2\mathbb{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\mathbb{x}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\pi_i = \frac{1}{i\hbar}\left[\pi_i, \frac{1}{2m}\pi_j\pi_i + e\phi\right] + \frac{\partial \pi_i}{\partial t}$$
$$= e\left[\mathbb{E} + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\mathbb{x}}{dt}\times\mathbb{B}\right)\right]$$

$\mathbb{B}\times\frac{d\mathbb{x}}{dt}$ 는 왜 들어감?

모든 ~~obser~~ expactation value가 게이지 불변인 걸 어떻게 증명하나?

$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$ 라고 썼는데, 내 기억에는 c가 없어야 함.

$|\tilde{\alpha}\rangle = G|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|x|\tilde{\alpha}\rangle$

$\langle\alpha|\mathbb{P} - \frac{e}{c}A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\mathbb{P} - \frac{e}{c}A - \frac{e}{c}\nabla\Lambda|\tilde{\alpha}\rangle$

게이지 변환의 연산자.

$$G = \exp\left(\frac{ie\Lambda(x)}{\hbar c}\right),$$

G는 unitary 하다.

G는 그저 x에 대한 연산자다.

Λ가 x에 대한 스칼라이기 때문.

$$\begin{aligned}
G^{+}\mathbb{P}G &= G^{+}\left([\mathbb{P}, G] + G\mathbb{P}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)[\mathbb{P}, G] + G^{+}G\mathbb{P} \\
&= \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) + \mathbb{P} \\
&= i\hbar\frac{ie}{\hbar c}\nabla\Lambda + \mathbb{P} \\
&= \mathbb{P} + \frac{e}{c}\nabla\Lambda.
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$는 게이지 변환에 가변이다.

$$|\tilde{\alpha}\rangle = G|\alpha\rangle = e^{ie\Lambda/\hbar c}|\alpha\rangle$$

$$\left(\frac{\pi^2}{2m} + e\phi\right)|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle \text{ 이면,}$$

$$\left(\frac{(\pi - \frac{e}{c}\nabla\Lambda)^2}{2m} + e\phi\right)|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle$$

게이지 변환이 전하를 보존하는 걸 어떻게 보이는가?

슈리딩거 방정식은 게이지 불변이다.

확률 current가 $$\vec{J} = -\left(\frac{i\hbar}{2m}\right)\left[\psi^*\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\psi\right] + \left(\frac{e}{mc}\right)A|\psi|^2$$

이렇게 바뀐다.

$$\psi = \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar} \longrightarrow \psi' = \sqrt{\rho}\, e^{i(S+e\Lambda/c)/\hbar}$$

※ 여기에서 $\vec{J}$가 게이지 불변임을 보여라.