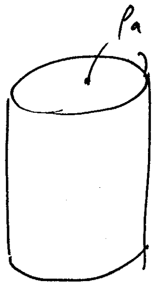


무한히 긴 원기둥, 반지름은 ρ_a 이다.

이 내부에서는 $\mathbb{B} = B\hat{z}$의 자기장이 있다. 외부는 $\mathbb{B} = 0$이다.

자기장은 원기둥 안으로 한정되어 있으나, $\mathbb{A}$는 아니다.

이 조건에서 $\mathbb{A}$는 다음과 같다.

입자가 원기둥 내부로 들어갈 수 없다고 치면, 원기둥 외부에 한해서 자기벡터 포텐셜은

$$\mathbb{A} = \left(\frac{B\rho_a^2}{2\rho}\right)\hat{\phi}$$

이다.

$$\mathbb{A} = \left(\frac{B\cdot(\pi\rho_a^2)}{2\pi\rho}\right)\hat{\phi}$$

라고 읽으면, stoke's theorem을 이용했음을 쉽게 알 수 있다.

우리는 자기벡터 포텐셜이 있는 경우, 슈뢰딩거방정식에서 gradient ∇ 연산은 $\nabla - \frac{ie}{\hbar c}\mathbb{A}$ 로 치환하면 된다는 것을 알고 있다.

원기둥 좌표계에서 gradient 연산은... 이 정도는 외울수 있다!

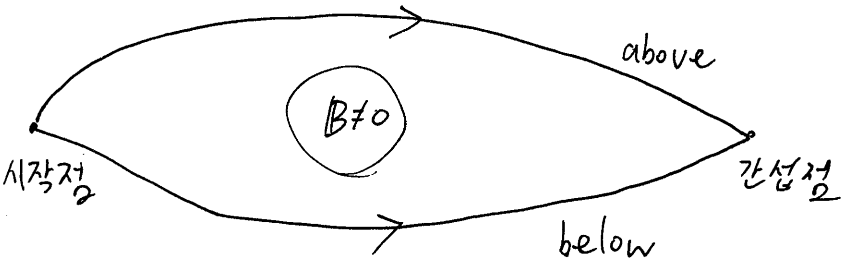
$$\nabla = \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

이게 $\mathbb{A}$ 때문에 이렇게 바뀐다는 거다.

$$\nabla - \frac{ie}{\hbar c}\mathbb{A} = \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar c}\cdot\frac{B\rho_a^2}{2\rho}\right]$$

슈뢰딩거 방정식이 바뀐다는 것은, $\mathbb{B} = 0$ 인 지역에서도 $\mathbb{A}$ 만으로 입자의 운동에 영향이 간다는 걸 의미한다.

그 예시중하나가 Aharonov-Bohm effect 이다.



원기둥이 있는 곳의 너머로 입자가 이동한다 치자.

Top view로 상황을 보면, 자기장 영역의 윗쪽으로 가는 경로와 아래로 가는 경로, 두 가지가 있다. 두 경로로 이루어진 면적 내부에 자기장 영역이 있는 것이다.

우리가 보일 것은, 자기장 내부 영역의 magnetic flux로 인해

above path 와 below path의 위상차이가 생긴다는 것이다.

입자가 직접 로렌츠힘을 겪지 않음에도 불구. 이런다.

이건 외워둬야 하는데, A가 있을 때 라그랑지안은 $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{e}{c}\dot{x}\cdot A$ 이라는 걸 꼭 외우자.

(x_{n-1}, t_{n-1})에서 (x_n, t_n)으로 가는 작은 경로의 액션은 A가 있을 경우,

$$S_{no\,A}(n, n-1) + \frac{e}{c}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot A\, dt$$

$$= S_{no\,A}(n, n-1) + \frac{e}{c}\int_{x_{n-1}}^{x_n} A\cdot d\vec{s}$$

시간 적분이 A에 대한 선적분으로 바뀐다.

시작점부터 도착점(간섭점)까지 총 액션에 $\frac{e}{c}\int_{x_0}^{x_N} A\cdot d\vec{s}$ 에 의한 추가항이 곱해진다. 그리하여 도착점에 도달할 때 phase는 아래 식으로 결정된다

$$\left[\prod \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{no\,A}(n, n-1)\right)\right]\cdot\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{x_0}^{x_N} A\cdot d\vec{s}\right)$$

윗쪽 경로와 아랫쪽 경로에서, A에 의한 phase 차이를 쉽게 구할 수 있다.

$$\left[\frac{e}{\hbar c}\int_{x_0}^{x_N} A\cdot d\vec{s}\right]_{above} - \left[\frac{e}{\hbar c}\int_{x_0}^{x_N} A\cdot d\vec{s}\right]_{below} = \frac{e}{\hbar c}\oint A\cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{e}{\hbar c}\int(\nabla\times A)\cdot d\vec{a}$$

$$= \frac{e}{\hbar c}\int B\cdot d\vec{a}$$

$$= \frac{e}{\hbar c}\Phi_B.$$

이때, $\oint$ 에서 의미하는 폐 경로는 above path를 통해 시작점에서 간섭점까지 간 뒤, below path로 시작점으로 돌아오는 경로다.

이 경로 내부에 자기장 영역이 있으므로, 적분 결과는 자기장 영역의 총 magnetic flux 이다.

phase difference는 2π의 주기성을 가진다.

fundamental unit of magnetic flux가 $2\pi \cdot \frac{\hbar c}{e}$ 라는 걸 알 수 있다.

Magnetic monopole.

$\nabla \cdot \mathbb{B} = 4\pi \rho_M$ 을 만족하는 $\mathbb{B}$가 존재할 수 있다면, 이것은 magnetic monopole의 존재를 시사한다.

양자 역학에서는 "만약 magnetic monopole이 있다면" 그것이 $e, \hbar, c$ 에 의해 양자화 되어야 한다고 예상한다. 이것을 e_M 이라고 쓰겠다.

전기장과 비슷하게, $\mathbb{B}$는 이렇게 생겨야 한다.

$$\mathbb{B} = \left(\frac{e_M}{r^2}\right)\hat{r}.$$

이에 상응하는 vector potential은 이렇게 생겼다.

$$\mathbb{A} = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

그러나 이건 문제가 있다. $\theta = \pi$ 일 때 정의가 안 된다. (singular point)

$\mathbb{A}$가 singular하지 않을 때는, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{A}) = 0$ 이다.

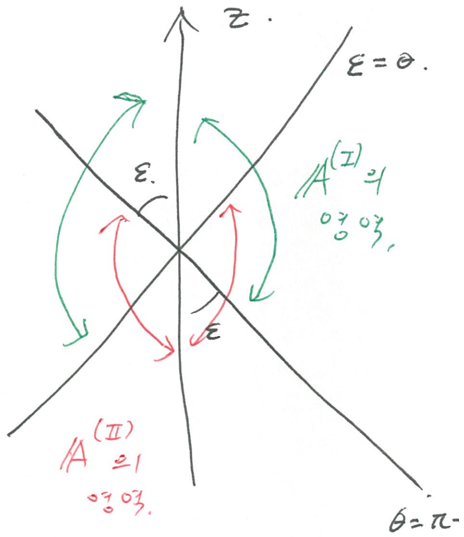
따라서 $\int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{A})\, dV = \int \nabla \cdot \mathbb{B}\, dV = 0.$

인데... 막상 $\nabla \cdot \mathbb{B} = 4\pi \rho_M$ 을 넣으면 $\int \nabla \cdot \mathbb{B}\, dV = 4\pi e_m$ 이어야 한다.

꼼수를 부리기로 한다. $\mathbb{A}$가 $\theta = \pi$ 에서만 정의가 안 되니까, 두 가지 $\mathbb{A}$의 멀쩡한 부분만 자르고 붙여서 쓰면 어떨까?

$$\mathbf{A}^{(I)} = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi} \qquad (\theta < \pi - \varepsilon)$$

$$\mathbf{A}^{(II)} = -\left[\frac{e_M(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\right]\hat{\phi} \qquad (\theta > \varepsilon)$$



범위를 보면, $\theta=\pi$ 가 약점인 A^{I} 에게는 $\theta=\pi$ 가 범위에 포함되어 있지 않고,

$\theta=0$ 가 약점인 $A^{(II)}$ 에게는 $\theta=0$가 범위 밖이다.

문제는 A^{I} 와 A^{II} 가 겹치는 영역 $\varepsilon < \theta < \pi-\varepsilon$ 이다.
둘은 같은 $\mathbf{B}$를 만들어야 하므로, A^{I} 와 A^{II} 는 게이지 변환 관계여야 한다. $\mathbf{A}^{(I)}$와 $\mathbf{A}^{(II)}$의 차를 보면,

$$\mathbf{A}^{(II)} - \mathbf{A}^{(I)} = -\left(\frac{2e_M}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi}, \qquad \mathbf{A}^{(II)} = \mathbf{A}^{(I)} + \nabla\Lambda.$$

이게 어떤 스칼라 함수 Λ 의 $\nabla\Lambda$ 와 같아야한다.

적합한 Λ를 찾으면, $\Lambda = -2e_M\phi$ 이다.

$$\nabla\Lambda = \hat{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}$$ 이므로,

게이지 변환의 연산자는 $\exp\left(+\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{e}{c}\Lambda\right)$ 라고 알고 있다.

$\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon$ 영역에서 $\mathbf{A}^{(I)}$을 이용해 푼 wave function 이 $\psi^{(I)}$, $\mathbf{A}^{(II)}$ 이용해 푼 게 $\psi^{(II)}$ 이라면, $\psi^{(II)}$는 $\psi^{(I)}$의 게이지 변환 이어야 한다.

$$\psi^{(II)} = \exp\left(-\frac{2ie e_M}{\hbar c}\phi\right)\psi^{(I)}$$

$\phi=0$ 일 때와 $\phi=2\pi$ 일 때, $\psi^{(II)}$와 $\psi^{(I)}$ 는 두 지점에서 값이 같아야,

즉, $\exp\left(-\frac{2iee_M}{\hbar c}\cdot 2\pi\right) = 1$ 이어야 된다.

즉, $\frac{2ee_M}{\hbar c} = \pm N$.

$e_M = \left|\frac{\hbar c}{2e}\right|$ 로 양자화 되었다!