Week 9-1 QM.

chapter 4를 먼저 나간다. Symmetry, conservation laws, and Degeneracy

recall, 뇌터 정리 Noether's theorem.

for infinitesimal transformation $q_i \to q_i + \delta q_i = \textcircled{}$
$= q_i + \varepsilon K_i(q)$

$K_i(q)$ 는 generator,

만약 라그랑지안이 그대로라면, 어떤 보존량 J가 있다.

$$J = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i(q)$$

증명 $$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$

$$= \sum_i \left(\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \varepsilon K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\varepsilon \frac{dK_i}{dt} \right] \right)$$

$$= \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i \right) = 0$$

예시,

transformation : ~~$x_i \Rightarrow$~~ $x_i \to x_i + \varepsilon$, $K_i = 1$

conserved quantity ! $J = \sum_i P_i K_i = P$

예시 2. z축에 회전,

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x' = \cos\varepsilon x - \sin\varepsilon y$
$y' = \sin\varepsilon x + \cos\varepsilon y$
$x' \simeq x - \varepsilon y$
$y' \simeq y + \varepsilon x$

$\to K_x = -y$
$K_y = x$

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} K_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} K_y$$
$$= P_x(-y) + P_y(x)$$
$$= L_z.$$

양자세계) Transform 하는 unitary operator Υ가
similarity transformation으로 $\mathcal{H}$를 변환해도
똑같다면, 즉, $\mathcal{H}$와 Υ가 commute하다면,

$$\Upsilon^\dagger \mathcal{H} \Upsilon = \mathcal{H}, \quad [\Upsilon, \mathcal{H}] = 0$$

→ 왜 항상 $\hbar$로 끼고 정의되나?

$\mathcal{T} = \mathbb{1} - \frac{i\varepsilon}{\hbar} G$ 바로 $[\mathcal{H}, G] = 0$ 가 따라오고,

시스템은 $\mathcal{T}$ 에 대칭이며, G는 보존량.

$$\frac{dG}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, G] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$ → 하이젠베르크 운동방정식

Degeneracy.

$[\mathcal{T}, \mathcal{H}]$ 를 만족하는 symmetry operator $\mathcal{T}$,

이건 primary reason of degeneracy 이다.

$|n\rangle \;:\; \mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$|n\rangle \rightarrow \mathcal{T}|n\rangle$

$\mathcal{H}\mathcal{T}|n\rangle = \mathcal{T}\mathcal{H}|n\rangle = E_n(\mathcal{T}|n\rangle)$

basis ket을 변환해도 같은 eisen value를 가지므로!

예시?) free particle 에서 momentum ket의 위치를 바꾸어도 똑같은 에너지 값을 갖는다.

4.2 discrete Symmetries., Parity or inversion.

parity → 점대칭. 좌표의 부호를 바꾸기

parity operator π., $|\alpha\rangle \rightarrow \pi|\alpha\rangle$

$\langle x\rangle_\pi = \langle\alpha|\pi^\dagger x \pi|\alpha\rangle = -\langle x\rangle$

즉, $\pi^\dagger x \pi = -x$. 가 π의 정의 자체?

π와 x는 anticommute. 즉 $\{x, \pi\} = x\pi + \pi x = 0$

$\pi|x'\rangle = |-x'\rangle$ 이라는 것도 간단하게 알 수 있다.

사실 $\pi|x'\rangle = e^{i\delta}|-x'\rangle$ 이긴 하지만, convention에 따라 $\delta = 0$ 이라 둔다.

π는 hermitian 하기까지 하다, $\pi = \pi^\dagger$.

$\pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$ unitary and Hermitian.

$\pi^2 = \mathbb{1}$ 이기까지 하니 invdutary

eigenvalue는 ± 1 이다.

질문: π 가 hermitian 이라면, π 가 관찰하는 것은 무엇?

→ 물리량이 벡터인지, 수도벡터인지 여부인가?

momentum 에는 π 가 어떻게 작용하나?

↳ generator of translation

dx'로 옮기는 translation $\xrightarrow{\text{parity}}$ $-dx'$로 옮기는 translation.

$$\pi^{\dagger}\mathcal{T}(dx')\pi = \mathcal{T}(-dx')$$

$$\mathcal{T}(dx') = \mathbb{1} - \frac{ip}{\hbar}dx'$$

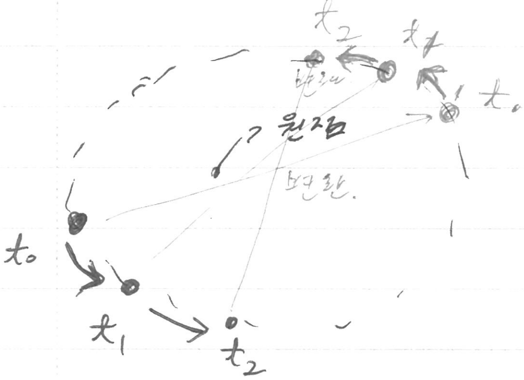
역시 $-\pi p = p\pi$ 이며, $\pi^{\dagger} p \pi = -p$.

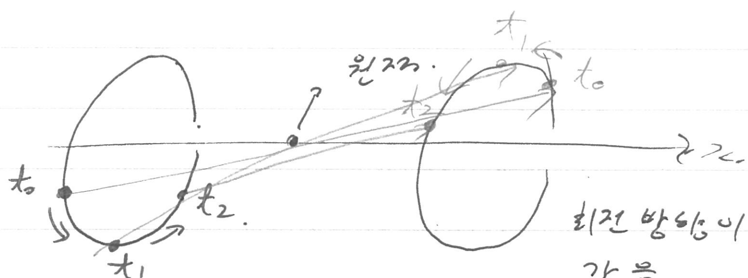
각운동량에는 $L = x \times p$, $[\pi, L] = 0$.

회전 연산과 parity는 commute 하다??

그래서 L과 π는 commute 한다.

직접 그림을 그려 보자! parity 다음 회전 시키기, 회전 다음 parity 하기 둘이 결과가 같아야





회전 방향이 같음.

polar vector: π에 odd 예) x, p.

axial vector: π에 even. 예) L, S (스핀)

~~sca~~ scalar : π에 even

pseudo scalar: π에 odd 예) $(S\cdot x)$

Wave function under parity

consider π eigen ket $|\alpha\rangle$

$$\pi|\alpha\rangle = \pm|\alpha\rangle$$

QM 9th week-1

$$\langle x'|\pi|\alpha\rangle = \pm\langle x'|\alpha\rangle = \pm\psi(x')$$
$$= \langle -x'|\alpha\rangle = \psi(-x')$$

$\therefore\ \psi(-x') = \pm\psi(x')$.

state 가 공간에 대해 even 인지 odd 인지 알 수 있다.

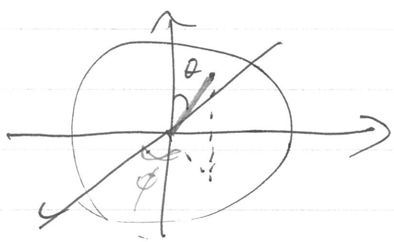
예시) $[\pi, L] = 0$.

spherical harmonics 는 simultanuous eigenfunction of L^2.

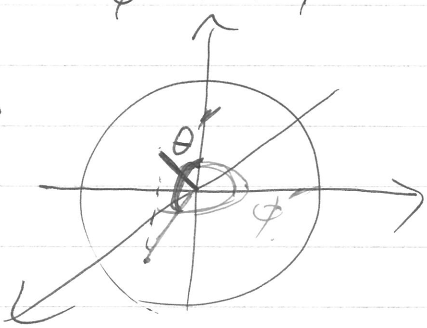
$$\langle x'|\alpha, lm\rangle = R_\alpha(r)\, Y_l^m(\theta,\phi)$$

space inversion

$$x' \to -x' \iff \begin{cases} r \to r \\ \theta \to \pi-\theta \\ \phi \to \pi+\phi \end{cases}$$



$\longrightarrow$



$\phi+\phi' = 2\pi$, $\theta+\theta' = \pi$.

$$Y_l^m(\theta,\phi) \longrightarrow (-1)^l Y_m^l.$$

Y_m^l 형태 파악함.

$$\cos\theta \to -\cos\theta$$
$$e^{im\phi} \to (-1)^m e^{im\phi}$$

$$Y_l^m(\theta,\phi) \propto P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

$$P_l^m(\cos\theta) \propto \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m} \sin^{2l}\theta.$$

질문) 아무 ket $|\alpha\rangle$에 대해, $\langle\alpha|\pi|\alpha\rangle = A$, $|\alpha\rangle$는 normalize

A가 (아니면 -1의 값이 나오는 게 수 있는) 가능?

$[\mathcal{H}, \pi] = 0$ 이면, 시스템이 (공간) 대칭이면, 그리고 non-degenerate $\{|n\rangle\}$ 이라면,

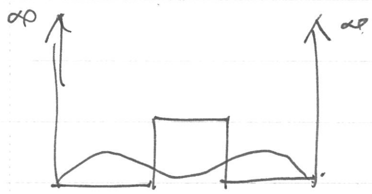
$H|n\rangle = E_n|n\rangle$, $|n\rangle$ 또한 π의 eigenket.

proof) consider $|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(1 \pm \pi)|n\rangle$

$\pi|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\pi \pm 1)|n\rangle = \pm\frac{1}{2}(1 \pm \pi)|n\rangle = \pm|\alpha\rangle$

$H|\alpha\rangle = E_n\left(\frac{1}{2}(1 \pm \pi)\right)|n\rangle = E_n|\alpha\rangle$

4.22 Symmetric double-well potential.

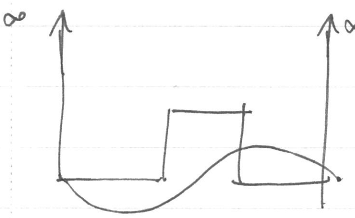


π와 $\mathcal{H}$가 commute.

$|S\rangle$: π-even, eigenvalue

$|A\rangle$: π-odd, eigenvalue.

$E_A > E_S$ 라고 한다.



입자가 양쪽을 왔다 갔다 하는 걸 보는 거.

입자 에너지가 배리어보다 작으면, 낮은 지역에서 cos sin,
배리어에서 cosh, sinh.

$$\begin{cases} |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle + |A\rangle) \\ |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle - |A\rangle) \end{cases}$$

$|R\rangle$과 $|L\rangle$은 에너지 eigenstate가 아니다.

$$|R, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_St/\hbar}|S\rangle + e^{-iE_At/\hbar}|A\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_St/\hbar}\underline{\left(|S\rangle + e^{-i(E_A-E_S)t/\hbar}|A\rangle\right)}$$

→ 언젠가 $|L\rangle$이 되는 순간이 오는데,

$\frac{(E_A - E_S)t}{\hbar} = \pi$가 될 때.

$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle)$.

베리어가 짱크면 뭐가 바뀌나? $\langle L|\mathcal{H}|R\rangle \simeq 0$.

터널링이 일어날수없다.

$E_A = E_S$ 가 된다! oscillation는 $E_A - E_S$ 로 올 텐!

$|S\rangle$랑 $|S\rangle$ $|A\rangle$를 각 각 어떻게 구할 수 있나?

에너지 eigen state가 많은거 같은데.

이런 느낌 . . .

모든 n수에 대해

symmetric한 걸 다 합친게

$|S\rangle$ 인가?

Spontanuous symmetry breaking. → 베리어가 짱크면 가능.

Large system phenomena.

강자성체의 경우, 스핀들의 방향성.