Jackson p 6.15. (a) 풀이. 2026 2182 김신지

회전과 반사 변환에 대해, 전기장은 true vector의 특성를 가진다. 위치벡터처럼 반사되고 회전된다. $\mathbb{J}$ 또한 전하밀도라는 true scalar 에다가 속도라는 true vector 를 곱했기 때문에, $\mathbb{J}$는 true vector 이다. 반면, $\mathbb{B}$ 는 pseudo vector 이다. 로렌츠힘에서 $\mathbb{F} = q(v \times \mathbb{B})$ 힘은 true vector, q 는 real scalar. v는 true scalar 이므로, true vector 와 cross product 하여 true vector 를 만들기 위해서 $\mathbb{B}$는 pseudo vector 여야 한다.

증명, 레비치비타 기호 이용, 아인슈타인 summation convention 이용.

$$(F_x, F_y, F_z) = q\hat{i}\,\varepsilon_{ijk} v_j B_k \xrightarrow[\text{inversion}]{\text{space}} (-F_x, -F_y, -F_z) = q\,\hat{i}\,\varepsilon_{ijk}(-v_j)B_k$$

$$(F_x, F_y, F_z) = q\,\hat{i}\,\varepsilon_{ijk} v_j B_k.$$

따라서, $\mathbb{E}$를 $\mathbb{J}$에 대한 1차항과 $\mathbb{H}$에 대한 2차항까지 expansion 하기 위해서는 true vector 인 $\mathbb{J}$와 pseudo vector 인 $\mathbb{H}$ 사이 연산 결과가 true vector 가 되어야 한다.

먼저 $\mathbb{J}$ 1차와 $\mathbb{H}$ 1차를 이용한 모든 가능한 연산을 상상해 보고, 그 결과가 true vector 인지 판별해 보자.

연산.	space inversion 결과 (	결과값이 True vector 인지 여부
$\mathbb{J} \times \mathbb{H}$	$\hat{i}\,\varepsilon_{ijk} J_j H_k \rightarrow \hat{i}\,\varepsilon_{ijk}(-J_j)H_k$ 전체 부호가 바뀜	네.
$\underbrace{\lvert\mathbb{H}\rvert}_{\mathbb{H}\text{ 절댓값.}} \mathbb{J}$	$\hat{i}\,\lvert\mathbb{H}\rvert J_i \rightarrow -\hat{i}\lvert\mathbb{H}\rvert J_i.$	어라? 이거 되는데요? 하지만 $\lvert\mathbb{H}\rvert = 0$ 에서 미분이 비해석적이라서 안 쓰는 것 같다.
$\lvert\mathbb{J}\rvert \mathbb{H}$	$\hat{i}\,\lvert\mathbb{J}\rvert H_i \rightarrow \hat{i}\,\lvert\mathbb{J}\rvert H_i$	아니오

이제 $\mathbb{J}$ 1차와 $\mathbb{H}$ 2차를 이용한 모든 가능한 연산을 상상하고 검토하자.

연산	space inversion 결과	true vector 여부
$\lvert\mathbb{H}\rvert^2 \mathbb{J}$	$\hat{i}\,\lvert\mathbb{H}\rvert^2 J_i \rightarrow -\hat{i}\lvert\mathbb{H}\rvert^2 J_i$	네.
$(\mathbb{H}\cdot\mathbb{J})\mathbb{H}$	$\hat{i}\,(H_j J_j)H_i \rightarrow \hat{i}\,H_j(-J_j)H_i.$ 전체 부호 바뀜	네.
$(\mathbb{J}\times\mathbb{H})\times\mathbb{H}$	$\mathbb{J}\times\mathbb{H}$가 true vector 이므로, 이것과 pseudo vector $\mathbb{H}$ 와의 cross product 는 true vector 다. $\hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{bij} J_i H_j H_c \rightarrow \hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{bij}(-J_i)H_j H_c$	네. 하지만, $(\mathbb{B}\times\mathbb{C})\times\mathbb{A} = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}$ $(\mathbb{J}\times\mathbb{H})\times\mathbb{H} = (\mathbb{J}\cdot\mathbb{H})\mathbb{H} - \lvert\mathbb{H}\rvert^2\mathbb{J}$. 앞서 살펴본 두 항에 종속되어 있다.

Jackson P 6.15 이어서

연산	space inversion 결과	true vector 여부.
$(\mathbb{H}\times\mathbb{H})\times\mathbb{J}$	그냥 0 이 나옴. 뭘 기대하나?	아니오,

다른 벡터나 pseudo vector가 나오는 연산의 경우의 수는 없는것 같다.

따라서, $\mathbb{E}$를 $\mathbb{J}$의 1차, H의 2차까지 전개 하는 경우는,

$\mathbb{J}$, $\mathbb{H}\times\mathbb{J}$, $|\mathbb{H}|^2\mathbb{J}$, $(\mathbb{H}\cdot\mathbb{J})\mathbb{H}$ 들의 항으로 이루어 질수밖에 없다.

(b) 풀이, time reversal invariance에 대해

옴의 법칙, $\mathbb{E}=\rho_0\mathbb{J}$ 에 time reversal을 하면 이상해 진다.

$\mathbb{E}$는 time-even, $\mathbb{J}$는 time-odd 라서 ρ_0는 스칼라지만 time-odd 여야 하기 때문이다. 옴의 법칙은 저항에 의해 에너지가 소산되므로, 열역학적으로 가역반응이 아니다. 그래서 시간 대칭이 깨진다.

$\mathbb{E}=R(\mathbb{H}\times\mathbb{J})$ 인 경우, $\mathbb{H}$는 time-odd 이므로, $\mathbb{H}\times\mathbb{J}$는 time-even 이다.

$$\mathbb{H}\times\mathbb{J}=\hat{e}_i\,\varepsilon_{ijk}H_jJ_k \xrightarrow{TR} \hat{e}_i\,\varepsilon_{ijk}(-H_j)(-J_k)=\hat{e}_i\,\varepsilon_{ijk}H_jJ_k$$

time even.

따라서 Hall effect 자체는 시간 대칭적이다.

$\mathbb{E}=\beta_1H^2\mathbb{J}$ 의 경우, 좌변은 time-even, 우변은 time-odd, 시간 대칭이 깨진다.

$\mathbb{E}=\beta_2(\mathbb{H}\cdot\mathbb{J})\mathbb{H}$ 의 경우, 우변이 time-odd, 역시 시간 대칭이 깨진다.

Jackson 6.20

문제) $\rho(\mathbf{x},t) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)\,\delta(t)$

$J_z(\mathbf{x},t) = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta'(t)$

z

$\ominus$
$\oplus$ $\downarrow \mathbf{P}$

디락 델타 미분 처음본다. 이 것은 임의 함수와 적분될 때, 그 함수의 미분값을 추출한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x)\,dx = \Big[\delta(x)f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f'(x)\,dx = -f'(0).$$

(a) $\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$를 풀면 $\Phi(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\delta(t)\,\frac{z}{r^3}$ 가 나옴을 보여라.

$\rightarrow$ 풀이.

푸아송 방정식의 green's function은 점전하에 의한 포텐셜. Φ_G 라고 표시하면,

$$\nabla\Phi_G = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \xrightarrow{\text{solution.}} \Phi_G = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

그래서 $\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$의 general solution은, $\boxed{\Phi_\rho(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{x}')\,\Phi_G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'}$ $\boxed{A}$

이때, Φ_ρ의 시간과 ρ의 시간이 같다고 두면, instantaneous Coulomb potential이 나온다.

$$\Phi_\rho(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d\mathbf{x}'$$

이제 우리의 $\rho = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)\,\delta(t)$ 에 대해 식 $\boxed{A}$를 풀어보자.

$$\Phi_\rho(\mathbf{x},t) = \iiint \delta(x')\,\delta(y')\,\delta'(z')\,\delta(t)\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\,dx'\,dy'\,dz'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\Big[x^2+y^2+(z'-z)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\,\delta(t)\,\delta'(z')\,dz'$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\,\delta(t)\left[\frac{d}{dz'}\Big[x^2+y^2+(z'-z)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\right]_{z'=0}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\,\delta(t)\,\frac{z}{|\mathbf{x}|^3}$$

$$\Phi_\rho(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\delta(t)\,\frac{z}{r^3}$$

Jackson 6.20 풀이. 이어서.

(b) 문제 → transverse current $\mathbf{J}$ 가

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{x},t) = -\delta'(t)\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{\epsilon}_3\,\delta(\mathbf{x}) - \frac{\boldsymbol{\epsilon}_3}{4\pi r^3} + \frac{3}{4\pi r^3}\mathbf{n}(\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\mathbf{n})\right]$$

이렇게 나옴을 보여라.

풀이) $-\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \mathbf{J}_l$, $\mathbf{J}_l$은 longitudinal current.

이를 구한 다음, $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} - \mathbf{J}_l$ 하자.

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\delta'(t)\,\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right) \quad , \quad \mathbf{J}_t = -\delta(\mathbf{x})\delta'(t) - \frac{\delta'(t)}{4\pi}\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

문제에서 언급한 대로 $\frac{z}{r^3}$의 gradient 를 구하는 게 관건.

Jackson 책에서 식 (4.20)는 $\mathbf{x}_0$ 위치에 있는 dipole moment $\mathbf{p}$ 에 의한 전기장 식이다.

$$(\text{Jackson } 4.20)\quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{p}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3} - \frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right]$$

이것이 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi_{\text{from dipole moment}}$ 일 것이다. 위 식에, 문제 조건에 맞게

$\mathbf{p} = -\boldsymbol{\epsilon}_3$, $\mathbf{x}_0 = 0$ 을 넣으면 $\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right)$을 구할 수 있다. Φ_p 앞의 $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$을 제외.

$$\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\left(\frac{\mathbf{n}(-\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\mathbf{n})-\boldsymbol{\epsilon}_3}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{4\pi}{3}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_3\,\delta(\mathbf{x})\right) = -4\pi\epsilon_0\,\mathbf{E}_{\text{Jackson }4.20}\Big|_{\mathbf{p}=-\boldsymbol{\epsilon}_3,\ \mathbf{x}_0=0}$$

시간이 있다면 $\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right)$ 계산을 직접 해 보겠다.

$$\mathbf{J}_t = -\delta(\mathbf{x})\delta'(t) - \left(\frac{\delta'(t)}{4\pi}\right)\left[-\frac{3\mathbf{n}(-\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\mathbf{n})}{r^3} - \frac{\boldsymbol{\epsilon}_3}{r^3} - \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{\epsilon}_3\,\delta(\mathbf{x})\right]$$

$$= -\delta'(t)\left[\frac{3}{4\pi r^3}\mathbf{n}(\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\mathbf{n}) - \frac{\boldsymbol{\epsilon}_3}{4\pi r^3} + \left(1-\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{\epsilon}_3\,\delta(\mathbf{x})\right]$$

$$\mathbf{J}_t = -\delta'(t)\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{\epsilon}\,\delta(\mathbf{x}) - \frac{\boldsymbol{\epsilon}_3}{4\pi r^3} + \frac{3}{4\pi r^3}\mathbf{n}(\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\mathbf{n})\right]$$

Jackson 6.20 풀이, 이어서 2.

(C) 문제 → 전기장이 causal 함을 보여라. $\mathbb{E}$의 각 component는 다음과 같다.

$$E_x(x,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c}{r}\left[-\delta''(r-ct) + \frac{3}{r}\delta'(r-ct) - \frac{3}{r^2}\delta(r-ct)\right]\sin\theta\cos\theta\cos\phi$$

$$E_y(x,t) = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}E_x$$

$$E_z(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c}{r}\left[\sin^2\theta\,\delta''(r-ct) + (3\cos^2\theta - 1)\cdot\left(\frac{\delta'(r-ct)}{r} - \frac{\delta(r-ct)}{r^2}\right)\right]$$

이걸 풀려면 벡터 포텐셜을 구해야 할 듯 하다.

현재 $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 가 되는 쿨롱 게이지를 쓰고 있으므로, $\nabla\cdot\mathbb{A} = 0$.

$$\nabla^2\mathbb{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbb{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbb{J}_t$$

힌트에서 $\mathbb{J}_t = -\delta'(t)\left[\mathbb{E}_3\,\delta(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$ 을 이용하기를 권고했다.

wave equation의 Green function을 이용하여 $\mathbb{A}$를 찾는다.

$$G_w(\underbrace{\mathbf{x},t,\mathbf{x}',t'}_{\text{전류밀도 근원의 좌표.}}) = \frac{\delta(t'-t+\tau)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

τ는 $\mathbb{J}$의 영향이 $\mathbb{A}$에 미치기까지 걸리는 시간, $\tau = \frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}{c}$, $\delta(t'-t+\tau)$는 $t-t'=\tau$ 여야 한다는 의미.

일단 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$로 두고,

$$\begin{cases} \nabla^2\mathbb{A}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{A}_1}{\partial t^2} = +\mu_0\,\delta'(t)\,\mathbb{E}_3\,\delta(\mathbf{x}) \\ \nabla^2\mathbb{A}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{A}_2}{\partial t^2} = \mu_0\,\delta'(t)\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \end{cases}$$

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{x},t) = \iint G_w(\mathbf{x},t,\mathbf{x}',t')\left(\mu_0\,\delta'(t')\,\mathbb{E}_3\,\delta(\mathbf{x}')\right)d\mathbf{x}'\,dt'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\delta(t'-t+\tau)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta'(t)\,\mathbb{E}_3\,\delta(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'\,dt' \qquad \mathbf{x}'=0.$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\delta\left(t'-t+\frac{|\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{x}|}\mathbb{E}_3\,\delta'(t')\,dt' \qquad |\mathbf{x}| = r.$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\delta(t'-t+r/c)}{r}\mathbb{E}_3\,\delta'(t')\,dt'$$

$$= -\frac{\mu_0\mathbb{E}_3}{4\pi r}\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\delta\left(t'-t+\frac{r}{c}\right)\right)\right]_{t'=0} = -\frac{\mu_0\mathbb{E}_3}{4\pi r}\delta'\left(-t+\frac{r}{c}\right)$$

Jackson 6.20 이어서 3.

이때, $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ 이다.

증명 →

$$\int \delta'(-x) f(x)\, dx = \Big[-\delta(-x) f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int \delta(-x) \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

따라서, $\mathbb{A}_1(\mathbb{x},t) = -\dfrac{\mu_0 \mathbb{E}_3}{4\pi r}\,\delta'\!\left(-t+\dfrac{r}{c}\right) = \dfrac{\mu_0 \mathbb{E}_3}{4\pi r}\,\delta'\!\left(t-\dfrac{r}{c}\right)$

이어서 $\mathbb{A}_2$을 푼다.

$$\mathbb{A}_2(\mathbb{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\delta(t'-t+\tau)}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}\left(\delta'(t)\,\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\mathbb{x}'\,dt'$$ 이걸 어떻게 적분하지?

안되겠다, 푸리에 변환으로 풀자. $\nabla^2 \mathbb{A}_2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbb{A}_2}{\partial t^2} = \mu_0 \delta'(t)\,\dfrac{1}{4\pi}\nabla\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r}$

이걸 시간에 대해 푸리에 변환, $-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \to +\dfrac{\omega^2}{c^2} = k^2$, 위 식의 우변의 푸리에 변환은

$$\int \delta'(t) e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\,dt = \left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\right]_{t=0} = -i\omega\,\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

$$(\nabla^2+k^2)\tilde{\mathbb{A}}_2 = \frac{1}{4\pi}(-i\omega\mu_0)\,\nabla\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

어떤 스칼라장 $\Gamma(\mathbb{x},\omega)$ 에 대해, $\tilde{\mathbb{A}}_2 = \nabla\dfrac{\partial}{\partial z}\Gamma(\mathbb{x},\omega)$ 일 거라고 대충 예상하자.

$$(\nabla^2+k^2)\nabla\frac{\partial}{\partial z}\Gamma = \nabla\frac{\partial}{\partial z}\left[(\nabla^2+k^2)\Gamma\right] = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)$$

$$(\nabla^2+k^2)\Gamma = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}$$

이걸 만족하는 Γ의 꼴을 찾아야 하는데, $(\nabla^2+k^2)\dfrac{e^{ikr}-1}{r} = -\dfrac{k^2}{r}$ 임이 알려져 있다.

$$(\nabla^2+k^2)\Gamma = +\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{1}{k^2}(\nabla^2+k^2)\frac{e^{ikr}-1}{r}, \qquad \Gamma = \frac{i\omega\mu_0(e^{ikr}-1)}{4\pi r k^2} = \frac{i}{4\pi\epsilon_0\omega}\cdot\frac{e^{ikr}-1}{r}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2\mu_0\epsilon_0.$$

$\tilde{\mathbb{A}}_2 = \dfrac{i}{4\pi\epsilon_0\omega}\nabla\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{e^{ikr}-1}{r}$ 이것을 다시 역변환,

Heaviside function.

$\dfrac{1}{i\omega}$ 역변환은 $H(t)$, $\dfrac{e^{ikr}}{i\omega} = \dfrac{e^{ir\omega/c}}{i\omega}$ 의 역변환은 $H(t-r/c)$ 라는 게 알려져서,

$\dfrac{1-e^{ikr}}{i\omega} \to H(t) - H(t-r/c)$, $\mathbb{A}_2 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{H(t)-H(t-r/c)}{r}$

결국 벡터 포텐셜은

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta'(t-r/c)}{r}\mathbb{E}_3 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{H(t)-H(t-r/c)}{r}$$

Jackson 6.20 이어서 4.

$\mathbb{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$ 로 전기장을 계산한다.

$$-\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\delta(t)\nabla\frac{z}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\delta(t)\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}$$

$$-\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\epsilon_3\frac{\delta''(t-r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(t)-\delta(t-r/c)}{r}$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\delta(t)\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_3}{c^2}\frac{\delta''(t-r/c)}{r} + \delta(t)\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} - \delta(t-r/c)\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\epsilon_3}{c^2}\frac{\delta''(t-r/c)}{r} - \nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(t-r/c)}{r}\right).$$

먼저 $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(t-r/c)}{r}$ 를 계산. $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(t-r/c)}{r} = \frac{z}{r}\left(-\frac{\delta(t-r/c)}{r^2} - \frac{\delta'(t-r/c)}{cr}\right) = -\frac{z}{r^3}\delta(t-r/c) - \frac{z}{cr^2}\delta'(t-r/c)$$

$$\left[\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(t-r/c)}{r}\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{z}{r^3}\delta(t-r/c) - \frac{z}{cr^2}\delta'(t-r/c)\right)$$

$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$

$x_i = z$ 이면 1, 아니면 0.

$$= -\frac{\delta_{i3}}{r^3}\delta(t-r/c) + \frac{3zx_i}{r^5}\delta(t-r/c)$$
$$+ \frac{3zx_i}{cr^4}\delta'(t-r/c) - \frac{\delta_{i3}}{cr^2}\delta'(t-r/c)$$
$$+ \frac{zx_i}{c^2r^3}\delta''(t-r/c).$$

이제 $t-r/c = T$.

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\delta_{i3}}{r^3}\delta(T) - \frac{3zx_i}{r^5}\delta(T) + \frac{\delta_{i3}}{cr^2}\delta'(T) - \frac{3zx_i}{cr^4}\delta'(T) + \left(\frac{\delta_{i3}}{c^2r} - \frac{zx_i}{c^2r^3}\right)\delta''(T)\right]$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{3zx}{r^5}\delta(T) - \frac{3zx}{cr^4}\delta'(T) - \frac{zx}{c^2r^3}\delta''(T)\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{zx}{r^3}\left[\frac{3}{r^2}\delta(T) + \frac{3}{cr}\delta'(T) + \frac{1}{c^2}\delta''(T)\right]$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{zy}{r^3}\left[\frac{3}{r^2}\delta(T) + \frac{3}{cr}\delta'(T) + \frac{1}{c^2}\delta''(T)\right]$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\delta(T) - \frac{3z^2}{r^5}\delta(T) + \frac{1}{cr}\delta'(T) - \frac{3z^2}{cr^4}\delta'(T) + \frac{1}{c^2r}\delta''(T) - \frac{z^2}{c^2r^3}\delta''(T)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r^2-3z^2}{r^5}\delta(T) + \frac{r^2-3z^2}{cr^4}\delta'(T) + \frac{r^2-z^2}{c^2r^3}\delta''(T)\right]$$

Jackson 6.20 이어서. 5.

$z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ 를 대입하면

문제에서 제시한 것과 같아질 것이다.

δ항 안에 모두 $r-ct$ 가 있으므로, 빛의 속도로 신호가 전파되었던 순간과

지점에만 전기장이 dipole 에 영향받는다는 걸 알 수 있다.

$$zx = r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi \rightarrow E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\phi}{r}\left[\frac{3}{r^2}\delta(T) + \frac{3}{cr}\delta'(T) + \frac{1}{c^2}\delta''(T)\right]$$

$zy = r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi$ 라서, E_y는 E_x 에서 $\cos\phi$를 $\sin\phi$로 바꾼 것.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}\delta(T) + \frac{1-3\cos^2\theta}{cr^2}\delta'(T) + \frac{1-\cos^2\theta}{c^2 r}\delta''(T)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\sin^2\theta}{c^2 r}\delta''(T) + (1-3\cos^2\theta)\left(\frac{\delta(T)}{r^3} + \frac{\delta'(T)}{2r^2}\right)\right]$$

$\delta(T) = \delta(t - r/c)$ 인 상태,

$\delta(t-r/c) = c\,\delta(r-ct)$, $\delta'(t-r/c) = -c^2\delta(r-ct)$, $\delta''(t-r/c) = c^2\delta(r-ct)$

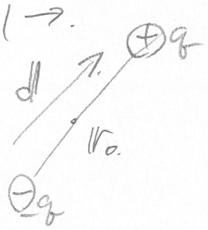
대입하면 교재와 같아진다.

Jackson 6.21.

Dipole moment $\mathbf{p}$. $\mathbf{r}_0(t)$ 위치에, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ 로 이동. 방향은 고정.

(a) 다음을 보여라. $\rho(\mathbf{x},t) = -(\mathbf{p}\cdot\nabla)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$, $\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = -\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\nabla)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$

풀이 →.



$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ 두 점전하의 거리(-전하에서 +까지)를 $\mathbf{d}$,

ㅇ 양전하의 전하를 q.

ρ는 단순히 두 전하를 디락델타 전하 밀도로 나타낸 것의 합이다.

⊖의 위치는 $\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{d}}{2}$, ⊕의 위치는 $\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{d}}{2}$

$$\rho(\mathbf{x},t) = -q\,\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)+\frac{\mathbf{d}}{2}\right) + q\,\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) = \rho_{negative} + \rho_{positive}$$

$\mathbf{d}$ 가 아주 작다고 가정, 디락델타들을 $\mathbf{d}$에 대해 테일러 전개.

$$\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)+\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \simeq \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)) + \frac{\mathbf{d}}{2}\cdot\nabla\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$$

$$\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \simeq \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)) - \frac{\mathbf{d}}{2}\cdot\nabla\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$$

$$\rho(\mathbf{x},t) = q\left\{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t)) - \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))\right\} - 2\times\left(\frac{\mathbf{d}}{2}q\right)\cdot\nabla\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$$

$$\rho(\mathbf{x},t) = -(\mathbf{p}\cdot\nabla)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$$

$\mathbf{J}$도 마찬가지, 두 전하를 나타내는 각 디락델타에 $\mathbf{v}$를 곱해준 것이 $\mathbf{J}$이다.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}\left(\rho_{negative}+\rho_{positive}\right) = \mathbf{v}\rho = -\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\nabla)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))$$

(b) magnetic dipole fied 와 electric quadrupole field 가 생기는 것을 보여라.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\times\mathbf{v}, \quad Q_{ij} = 3(x_{0i}p_j + x_{0j}p_i) - 2\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}\,\delta_{ij}$$

magnetic dipole 부터 구하자. $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int(\mathbf{x}\times\mathbf{J})\,d\mathbf{x}$.
→ 이게 $\mathbf{p}\times\mathbf{v}$ 가 나와야.

$$\int\mathbf{x}\times\mathbf{J}\,d\mathbf{x} = \int \mathbf{x}\times\left\{-\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\nabla)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\right\}d\mathbf{x} = -\int(\mathbf{x}\times\mathbf{v})(\mathbf{p}\cdot\nabla)(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0))\,d\mathbf{x}.$$

Jackson 6.21 이어서 1.

성분대로 쪼개서 계산.

$$\left[\int \mathbf{x}\times\mathbf{J}\,d\mathbf{x}\right]_i = -\int \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\,d\mathbf{x} = -\varepsilon_{ijk} v_k \int x_j (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\,d\mathbf{x}$$

$$\int x_j p_a \frac{\partial}{\partial x_a}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\,d\mathbf{x} = \underbrace{\Big[x_j p_a\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\Big]_{x_a=-\infty}^{x_a=\infty}}_{\downarrow\, 0} - \int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\, p_a \frac{\partial x_j}{\partial x_a}\,d\mathbf{x}$$

$$= -\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\, p_j\,d\mathbf{x} = -p_j$$

$$\left[\int \mathbf{x}\times\mathbf{J}\,d\mathbf{x}\right]_i = -\varepsilon_{ijk} v_k(-p_j) = [\mathbf{p}\times\mathbf{v}]_i, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\times\mathbf{v}$$

다음은 electric quadrupole, $Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{x})(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\,d\mathbf{x}$

$$= \int (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})(-\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0(t))\,d\mathbf{x}$$

$$= -\int (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\, p_a \frac{\partial}{\partial x_a}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\,d\mathbf{x}$$

$$= \underbrace{-\Big[(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\, p_a\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\Big]_{x_a=-\infty}^{x_a=\infty}}_{0} + \int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)\, p_a \frac{\partial}{\partial x_a}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\,d\mathbf{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_a}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}) = 3x_i\delta_{aj} + 3x_j\delta_{ai} - 2x_a\delta_{ij}$$

$$Q_{ij} = \int p_a\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)(3x_i\delta_{aj} + 3x_j\delta_{ai} - 2x_a\delta_{ij})\,d\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{r}_0 \text{ 대입..}$$

$$= p_a[3r_{0i}\delta_{aj} + 3x_{0j}\delta_{ai} - 2r_{0a}\delta_{ij}]$$

$$= 3(r_{0i}p_j + r_{0j}p_i) - 2\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}\,\delta_{ij}.$$

교재에서는 r_{0i}와 r_{0j}를 x_{0i}와 x_{0j}라고 쓴 것 같다.

Jackson 6.21 이어서 2.

먼저 $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij}\frac{n_i n_j}{r^3}$ 로 potential 을 구한 뒤,

quasi static 이므로 $\mathbb{E} = -\nabla\phi$ 로 전기장을 계산한다.

$$\sum_{ij} Q_{ij} n_i n_j = \sum_{ij} n_i n_j \left[3(x_{0i}p_j + x_{0j}p_i)\right] - 2\sum_{ij} n_i n_j\, \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}\,\delta_{ij}$$

$$= 2\cdot 3\sum_{ij} n_i n_j (x_{0i}p_j) - 2\sum_{i} n_i n_i\, \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}$$

$$= 6(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})\sum_i n_i x_{0i} - 2\,\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}$$

$$= 6(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) - 2\,\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}.$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p}\right]$$

상수다.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\nabla\frac{1}{r^3}\left(3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-3\nabla\left(\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)}{r^3}\right) + (\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p})\nabla\frac{1}{r^3}\right]$$

summation convension

$\mathbf{n} = \frac{1}{r}\hat{i}x_i$ $\qquad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, $\qquad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$$\nabla\frac{1}{r^3} = \hat{i}\cdot\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^{-3} = -3\cdot r^{-4}\cdot\frac{x_i}{r}\hat{i} = -\frac{3\mathbf{n}}{r^4}$$

어떤 상수 벡터 $\mathbf{a}$,

$$\nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}a_j\right) = \hat{i}\left(x_j a_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}a_j\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \hat{i}\left\{x_j a_j\cdot\left(-\frac{x_i}{r^3}\right) + \frac{1}{r}a_j\delta_{ij}\right\}$$

$$= x_j a_j\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(\hat{i}\frac{x_i}{r}\right) + \frac{1}{r}\hat{i}a_i$$

$$= -\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})}{r}\mathbf{n} + \frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})}{r}$$

$$\nabla\left(\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\nabla\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)\right\} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)\nabla\frac{1}{r^3}$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[\frac{\mathbf{p} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})}{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)}{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})\right] - \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)}{r^4}$$

(이거 3곱하고, $(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p})\nabla\frac{1}{r^3} = -\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p})}{r^4}$ 이거 더해주면 전기장 나옴.)

다 정리하면,

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\left[15\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - 3\mathbf{r}_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - 3\mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) - 3\mathbf{n}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p})\right]$$

Jackson 6.22.

(a) 아까 본 문제와 같은 moving dipole / quasistatic.

$$\mathbb{J} = -\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\nabla)\,\delta(\mathbb{x}-\mathbb{r}_0(t))$$ 을 이용해,

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0\,\mathbb{v}(\mathbb{n}\cdot\mathbb{p})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{(\mathbb{p}\times\mathbb{v})\times\mathbb{x}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{p}(\mathbb{x}\cdot\mathbb{v}) + \mathbb{v}(\mathbb{x}\cdot\mathbb{p})}{r^3}\right]$$

임을 보여라.

풀이. → $\nabla^2 A = \mu_0 \mathbb{J}$, $\quad A(\mathbb{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbb{J}}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}\,d\mathbb{x}'$ 를 이용.

$$\int \frac{\mathbb{J}}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}\,d\mathbb{x}' = -\mathbb{v}\int \frac{(\mathbb{p}\cdot\nabla)\,\delta(\mathbb{x}'-\mathbb{r}_0)}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}\,d\mathbb{x}' = -\mathbb{v}\int \frac{p_i \frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathbb{x}'-\mathbb{r}_0)}{|\mathbb{x}-\mathbb{x}'|}\,d\mathbb{x}'$$

$$= \mathbb{v}\int \delta(\mathbb{x}'-\mathbb{r}_0)\,\mathbb{p}\cdot\left(\nabla\frac{1}{|\mathbb{x}'-\mathbb{x}|}\right)d\mathbb{x}'$$

$$= \mathbb{v}\left(\mathbb{p}\cdot\nabla\frac{1}{\mathbb{r}_0}\right) = \mathbb{v}\,\frac{\mathbb{p}\cdot\mathbb{n}}{r^2}$$

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\mathbb{v}\,\frac{\mathbb{p}\cdot\mathbb{n}}{r^2} = \frac{\mu_0\,\mathbb{v}(\mathbb{n}\cdot\mathbb{p})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\mathbb{v}(\mathbb{x}\cdot\mathbb{p})$$

vector identity.

$$\mathbb{a}\times(\mathbb{b}\times\mathbb{c}) = \mathbb{b}(\mathbb{a}\cdot\mathbb{c}) - \mathbb{c}(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$$

$$(\mathbb{p}\times\mathbb{v})\times\mathbb{x} = \mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) - \mathbb{p}(\mathbb{v}\cdot\mathbb{x}) = 2\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) - \left\{\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) + \mathbb{p}(\mathbb{v}\cdot\mathbb{x})\right\}$$

$$\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) = \frac{1}{2}(\mathbb{p}\times\mathbb{v})\times\mathbb{x} + \frac{1}{2}\left\{\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) + \mathbb{p}(\mathbb{v}\cdot\mathbb{x})\right\}$$

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^3}\left[\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{p}\times\mathbb{v})\times\mathbb{x}}_{\mathbb{v}\text{와 }\mathbb{p}\text{에 antisym}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left\{\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) + \mathbb{p}(\mathbb{v}\cdot\mathbb{x})\right\}}_{\mathbb{v}\text{와 }\mathbb{p}\text{에 sym}}\right]$$

(b) $\mathbb{B}_{sym} = -\frac{3\mu_0}{8\pi r^3}\,\mathbb{n}\times\left[\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{n}) + \mathbb{p}(\mathbb{v}\cdot\mathbb{n})\right]$ 임을 보여라.

$$\mathbb{A}_{sym} = \frac{1}{2}\left\{\mathbb{v}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{x}) + \mathbb{p}(\mathbb{v}\cdot\mathbb{x})\right\}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi r^3}, \qquad \mathbb{B}_{sym} = \nabla\times\mathbb{A}_{sym}.$$

임의의 벡터, $\mathbb{a}$와 $\mathbb{b}$에 대해, $\nabla\times\left[\frac{1}{r^3}\mathbb{a}(\mathbb{b}\cdot\mathbb{x})\right]$ 를 계산해 보자.

$$\frac{1}{r^3}\mathbb{a}(\mathbb{b}\cdot\mathbb{x}) = \frac{\hat{i}\,a_i b_l x_l}{r^3}, \qquad \nabla\times\left[\frac{1}{r^3}\mathbb{a}(\mathbb{b}\cdot\mathbb{x})\right] = \varepsilon_{ijk}\,\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{a_k b_l x_l}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{x_l}{r^3} = x_l\frac{\partial r^{-3}}{\partial x_j} + r^{-3}\delta_{jl} = x_l\cdot\frac{x_j}{r}\frac{\partial r^{-3}}{\partial r} + r^{-3}\delta_{jl} = -3\frac{x_j x_l}{r^5} + \frac{\delta_{jl}}{r^3}$$

Jackson 6.22 풀이, 이어서.

$$\nabla\times\left[\frac{1}{r^3}\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\right] = \left(\hat{i}\,\varepsilon_{ijk}a_k b_l\right)\left(-3\frac{x_j x_l}{r^5}+\frac{\delta_{jl}}{r^3}\right)$$

$$= \left(-3\hat{i}\,\varepsilon_{ijk}\frac{x_j a_k}{r^5}\right)x_l b_l + \left(\hat{i}\,\varepsilon_{ijk}\frac{b_j a_k}{r^3}\right)$$

$$= -3\frac{\mathbf{x}\times\mathbf{a}}{r^5}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}) + \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{a}}{r^3} =$$

$$\nabla\times\mathbf{A}_{sym} = \frac{\mu_0}{8\pi}\left[\nabla\times\frac{\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}{r^3}+\nabla\times\frac{\mathbf{p}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})}{r^3}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi}\left[-3r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{v}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\} - 3r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{p}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\} + \underbrace{r^{-3}(\mathbf{p}\times\mathbf{v}) + r^{-3}(\mathbf{v}\times\mathbf{p})}_{\text{cancle out.}}\right]$$

$$= -\frac{3\mu_0}{8\pi}\left[r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{v}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\} + r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{p}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\}\right]$$

$\mathbf{n} = r^{-1}\mathbf{x}$.

$$= -\frac{3\mu_0}{8\pi r^3}\,\mathbf{n}\times\left[\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) + \mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\right]$$

$\to \mathbf{B}_{sym}$.

(c) $\nabla\times\mathbf{B}_{sym}$ 을 계산하여 $\mathbf{B}_{sym}$ 이 electric quadrupole field 의 quasi-static magnetic field 임을 보여라.

$$\nabla\times\mathbf{B}_{sym} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}_{sym}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}_{sym}) - \nabla^2\mathbf{A}_{sym}$$

$\nabla\cdot\mathbf{A}_{sym} = 0$ 이면 좋을텐데... 아닌 거 같다.

$r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})\}$ 의 curl 을 계산해보자.

$$r^{-5}\mathbf{x}\times\{\hat{i}\,a_i x_l b_l\} = \underline{r^{-5}\varepsilon_{ijk}x_j a_k x_l b_l\,\hat{i}}.$$

$$\nabla\times\left(r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})\}\right) = \hat{a}\,\varepsilon_{abc}\frac{\partial}{\partial x_b}\left(r^{-5}\varepsilon_{cjk}x_j a_k x_l b_l\right)$$

$$= \hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}a_k b_l\frac{\partial}{\partial x_b}\left(r^{-5}x_j x_l\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\left(r^{-5}x_j x_l\right) = r^{-5}(x_l\delta_{jb}+x_j\delta_{lb}) + x_j x_l\frac{\partial r^{-5}}{\partial x_b}$$

$$= r^{-5}(x_l\delta_{jb}+x_j\delta_{lb}) - 5r^{-7}x_b x_j x_l.$$

$$\nabla\times\left(r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})\}\right) = \hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}a_k b_l r^{-5}(x_l\delta_{jb}+x_j\delta_{lb}) - 5\hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}r^{-7}x_b a_k b_l \underbrace{}_{x_j x_l}$$

Jackson 6.22 풀이 이어서_2.

$$\hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}\delta_{jb} = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{cbk} = -\varepsilon_{abc}\varepsilon_{kbc} = -\varepsilon_{bca}\varepsilon_{bck} = -\{\delta_{cc}\delta_{ak} - \delta_{ck}\delta_{ac}\}$$
$$= -\{3\delta_{ak} - \delta_{ak}\} = -2\delta_{ak}$$

$$\hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}\delta_{jb}r^{-5}a_k b_l x_l = -2\delta_{ak}\hat{a}\,r^{-5}a_k b_l x_l$$
$$= -2\hat{a}\,a_a b_l x_l r^{-5} = -2\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})r^{-5}$$

$$\hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}\delta_{lb}a_k b_l r^{-5}x_j = \hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}a_k b_b x_j r^{-5}$$

$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk} = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{jkc}$
$= \delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{bj}$

$$= \hat{a}\,a_k b_b x_j r^{-5}(\delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{bj})$$
$$= \hat{a}\,a_k b_k x_a r^{-5} - \hat{a}\,a_a b_j x_j r^{-5}$$
$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{x}r^{-5} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})r^{-5}$$

$$-5\hat{a}\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cjk}r^{-7}x_b x_j x_l a_k b_l = -5\hat{a}\,r^{-7}x_b x_a x_l a_b b_l$$
$$+5\hat{a}\,r^{-7}x_b x_b x_l a_a b_l$$

ε

$$= -5r^{-7}\left(\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{a}|\mathbf{x}|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})\right)$$

$\therefore$ $\nabla\times\left(r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})\}\right)$

$$= -2\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})r^{-5} + \mathbf{x}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})r^{-5} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})r^{-5}$$
$$-5\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})r^{-7} + 5\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})r^{-5}$$

$$= r^{-4}\left[2\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - 5\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})\right]$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_{syn} = -\frac{3\mu_0}{8\pi}\left[\nabla\times\left(r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\}\right) + \nabla\times\left(r^{-5}\mathbf{x}\times\{\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})\}\right)\right]$$

$$= -\frac{3\mu_0}{8\pi r^4}\Big[2\mathbf{p}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}) - 5\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})$$
$$+ 2\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}) - 5\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})\Big]$$

$$= \frac{\mu}{4\pi r^4}\left[15\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) - 3\mathbf{p}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) - 3\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}) - 3\mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})\right]$$

Jackson 6.22 풀이 이어서 3.

$$\nabla\times\mathbf{B}_{sym} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$ → problem 6.21 에서 나온 거.

$$= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\left\{15\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t))(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - 3\mathbf{r}_0(t)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - 3\mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t)) - 3\mathbf{n}(\mathbf{r}_0(t)\cdot\mathbf{p})\right\}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[15\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - 3\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - 3\mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) - 3\mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})\right]$$

예상대로. 나온다.

(d) $\mathbf{B}_{total} = \mathbf{B}_{sym} + \mathbf{B}_{dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{v}\times\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}}{r^3}$ 임을 보여라.

magnetic dipole moment 가 $\mathbf{m}$ 일 때, $\mathbf{B}_{dipole}$ 의 공식은

$$\mathbf{B}_{dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\mathbf{x}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right]$$

여기에 6.21 에서 구한 $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\times\mathbf{v}$ 을 대입, $\mathbf{m}\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{p}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{x} =$

$$\mathbf{B}_{dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3}{2}\frac{\mathbf{x}\{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\}}{r^5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{v}}{r^3}\right]$$

$$= \frac{3\mu_0}{8\pi r^3}\left[\mathbf{n}\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\} - \frac{1}{3}\mathbf{p}\times\mathbf{v}\right] = \frac{3\mu_0}{8\pi r^3}[$$

이때, $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v})) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})) - (\mathbf{p}\times\mathbf{v})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{n}\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\} - (\mathbf{p}\times\mathbf{v})$

$$\mathbf{B}_{total} = \frac{3\mu_0}{8\pi r^3}\left[\mathbf{n}\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\} - \frac{1}{3}\mathbf{p}\times\mathbf{v} - \mathbf{n}\times\{\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})\} - \mathbf{n}\times\{\mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\}\right]$$

$$\to -\mathbf{n}\times[\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) + \mathbf{p}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})]$$

$$= -\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v}) + 2\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})]$$

$$= \frac{3\mu_0}{8\pi r^3}\left[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v})) + \frac{2}{3}\mathbf{p}\times\mathbf{v} - \mathbf{n}\times\{\mathbf{n}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v}) + 2\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\}\right]$$

$$= \frac{3\mu_0}{8\pi r^3}\left[\frac{2}{3}\mathbf{p}\times\mathbf{v} - 2\mathbf{n}\times\mathbf{v}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\mathbf{v}\times[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) - \mathbf{p}]$$

끝!

Jackson table 6.1. 의 transformation property 를 증명하라.

---

coordinate, $\mathbb{X}$ 는 space inversion odd, time 에는 even.

↳ 이는 증명할 것도 없이 axiom 이라고 보아야 하지 않나? polar vector 의 정의 자체가 "transformation property 가 위치벡터와 같은 벡터" 이니까.

$$\mathbb{X} : (x, y, z) \xrightarrow[\text{space inversion}]{SI} (-x, -y, -z) = -\mathbb{X}.$$

$\mathbb{X}$ 는 시간에 독립적이므로, time reversal 에 even 하다.

Velocity v 는 SI 에 odd, TR 에 odd.

앞으로 space inversion 은 ′(프라임) 으로 표기, time reversal 은 ~(tilde) 로 표기.

$$v : \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \xrightarrow{SI} v' = \left(\frac{d(-x)}{dt}, \frac{d(-y)}{dt}, \frac{d(-z)}{dt}\right) = -v$$

$$\xrightarrow{TR} \tilde{v} = \left(\frac{dx}{d(-t)}, \frac{dy}{d(-t)}, \frac{dz}{d(-t)}\right) = -v.$$

Momentum $\mathbb{P}$ 은 SI 에 odd, TR 에 odd.

$\mathbb{P} = m v$ 이다. m 은 SI 에 even, TR 에 even. 인 true scalar 이다.

$\mathbb{P}$ 의 transformation property 는 v 와 똑같아진다.

Angular momentum $\mathbb{L} = \mathbb{X} \times \mathbb{P}$ 는 SI 에 even, TR 에 odd.

Vector 와 vector 의 cross product 는 pseudovector 이며, SI 에 even 하다.

$$\mathbb{L} = \hat{i}\, \varepsilon_{ijk} x_j P_k \xrightarrow{SI} \mathbb{L}' = \hat{i}\, \varepsilon_{ijk} (-x_j)(-P_k) = \hat{i}\, \varepsilon_{ijk} x_j P_k = \mathbb{L}.$$

$$\xrightarrow{TR} \tilde{\mathbb{L}} = \hat{i}\, \varepsilon_{ijk} x_j (-P_k) = -\hat{i}\, \varepsilon_{ijk} x_j P_k = -\mathbb{L}.$$

Force 는 SI 에 odd, TR 에 even.

$\mathbb{F} = \dot{\mathbb{P}}$, 힘은 운동량의 시간미분이므로, space inversion 은 운동량과 특성이 똑같고, time reversal 은 운동량과 특성이 반대다.

$$\mathbb{F} = \left(\frac{dP_x}{dt}, \frac{dP_y}{dt}, \frac{dP_z}{dt}\right) \xrightarrow{SI} \mathbb{F}' = \left(-\frac{dP_x}{dt}, -\frac{dP_y}{dt}, -\frac{dP_z}{dt}\right) = -\mathbb{F}$$

$$\xrightarrow{TI} \tilde{\mathbb{F}} = \left(\frac{d(-P_x)}{d(-t)}, \frac{d(-P_y)}{d(-t)}, \frac{d(-P_z)}{d(-t)}\right) = \mathbb{F}.$$

뉴턴 운동방정식은 시간 대칭이다.

Jackson table 6.1 증명, 이어서 1.

Torque $\mathbb{N}$ 은 SI 에 even TR 에 even.

$\mathbb{N} = \mathbb{x} \times \mathbb{F}$, true vector 두 개의 cross product 이기에 pseudovector,

time even 한 두 물리량의 곱이기에 time even 하다.

$$\mathbb{N} = \hat{i}\,\varepsilon_{ijk} x_j F_k \xrightarrow{SI} \hat{i}\,\varepsilon_{ijk}(-x_j)(-F_k) = \hat{i}\,\varepsilon_{ijk} x_j F_k = \mathbb{N}.$$

$$\xrightarrow{TR} \hat{i}\,\varepsilon_{ijk} x_j F_k = \mathbb{N}.$$

---

kinetic energy $\frac{p^2}{2m}$ 은 SI 에 even, TR 에 even.

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_i^2}{2m} \xrightarrow{SI} \frac{(-p_i)(-p_i)}{2m} = \frac{p_i^2}{2m}$$ 부호가 변한 이전과 같다.

summation convention.

$$\xrightarrow{TR} \frac{(-p_i)(-p_i)}{2m} = \frac{p_i^2}{2m}$$ 부호가 변한 이전과 같다.

Potential energy $U(\mathbb{x})$ 는 SI 에 even, TR 에 even.

$\mathbb{F}' = -\mathbb{F}$ 적용.

$$\mathbb{F} = -\nabla U = -\hat{i}\frac{\partial U(\mathbb{x})}{\partial x_i} \xrightarrow{SI} -\hat{i}\frac{\partial U'}{\partial(-x_i)} = \hat{i}\frac{\partial U'}{\partial x_i} = -\mathbb{F} = \hat{i}\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$\mathbb{F}$ 는 SI 에 odd 이므로, $\frac{\partial U'}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ 가 성립해야 한다. 따라서 $U' = U$.

U 는 SI 에 even 한 스칼라여야 한다.

$$\mathbb{F} = -\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x_i} \xrightarrow{TR} \tilde{\mathbb{F}} = -\hat{i}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} = \mathbb{F} = -\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$\mathbb{F}$ 는 TR 에 even 이므로, $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ 여야 한다. U 는 TR 에 even 해야 한다.

Charge density $\rho(\mathbb{x}, t)$ 는 SI 에 even, TR 에 even

ρ 는 개별 점전하의 디랙델타 distribution 의 합이다.

$$\rho(\mathbb{x}, t) = \sum_i q_i\,\delta(\mathbb{x} - \mathbb{r}_i(t))$$

q_i 는 i번째 전하의 전하량

$\mathbb{r}_i(t)$ 는 t 시간에서 i번째 전하의 위치.

전하량은 SI 에 even 한 스칼라, TR 에도 even 하다.

$$\delta(\mathbb{x} - \mathbb{r}_i(t)) \xrightarrow{SI} \delta(-\mathbb{x} + \mathbb{r}_i(t)) = \delta(\mathbb{x} - \mathbb{r}_i(t))$$ SI 에 even

$$\xrightarrow{TR} \delta(\mathbb{x} - \mathbb{r}_i(-t)) = \delta(\mathbb{x} - \mathbb{r}_i(t))$$ $\mathbb{r}$ 은 위치 벡터라 TR 에 even.

Jackson table 6.1 증명하기. 이어서 2.

$\mathbb{J}$는 SI에 odd, TR에 odd.

척 봐도 속도, $\mathbb{v}$와 transformation property가 같은 걸 알수 있다.

정의에 따라, $\mathbb{J}(\mathbb{x},t) = \rho(\mathbb{x},t)\,\mathbb{v}(\mathbb{x},t)$. $\mathbb{v}$는 $\mathbb{x}$위치 t시간에서 전하의 velocity를 나타낸 vector field. ρ가 SI에 even, TR에 even하기 때문에 $\mathbb{J}$의 transformation property가 $\mathbb{v}$와 같아진다.

$$\mathbb{J} = \rho\mathbb{v} \xrightarrow{SI} \rho'\mathbb{v}' = \rho(-\mathbb{v}) = -\mathbb{J}$$

$$\mathbb{J} = \rho\mathbb{v} \xrightarrow{TR} \tilde{\rho}\tilde{\mathbb{v}} = \rho(-\mathbb{v}) = -\mathbb{J}.$$

$\mathbb{E}$는 SI에 odd TR에 even.

맥스웰 방정식까지 갈 필요 없이, 전기장의 기본 정의 활용.

$\mathbb{E} = \dfrac{\mathbb{F}}{q}$, q는 ρ와 마찬가지로, SI에 even하고 TR에 even한 scalar, 따라서 $\mathbb{E}$의 transformation property는 $\mathbb{F}$와 일치한다.

$$\mathbb{E} \xrightarrow{SI} \mathbb{E}' = \frac{\mathbb{F}'}{q'} = \frac{-\mathbb{F}}{q} = -\mathbb{E}$$

$$\mathbb{E} \xrightarrow{TR} \tilde{\mathbb{E}} = \frac{\tilde{\mathbb{F}}}{\tilde{q}} = \frac{\mathbb{F}}{q} = \mathbb{E}$$

Polarization $\mathbb{P}$는 SI에 odd, TR에 even.

bound charge density ρ_b와의 관계를 이용.

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbb{P} = -\frac{\partial P_i}{\partial x_i}$$

$$\rho_b \xrightarrow{SI} \rho_b' = -\frac{\partial P_i'}{\partial(-x_i)} = \frac{\partial P_i'}{\partial x_i} = \rho_b = -\frac{\partial P_i}{\partial x_i} \quad \therefore\ P_i' = -P_i.$$

SI에 odd.

$$\rho_b \xrightarrow{TR} \tilde{\rho}_b = -\frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial x_i} = \rho_b = -\frac{\partial P_i}{\partial x_i} \quad \therefore\ \tilde{P}_i = P_i$$

TR에 even.

Displacement $\mathbb{D}$ SI에 odd, TR에 even.

맥스웰 방정식, $\nabla\cdot D = \rho$ 이용.

$\rho = \dfrac{\partial D_i}{\partial x_i}$, 위의 polarization 에서 증명법과 완전 일치하므로 생략.

Jackson table 6.1 증명하기. 이어서 3.

Magnetic induction $\mathbb{B}$ 는 SI even, TR odd.

로렌츠힘 $\mathbb{F} = q(\mathbb{v} \times \mathbb{B})$ 를 이용.

$$\mathbb{F} \xrightarrow{SI} \mathbb{F}' = q'(\mathbb{v}' \times \mathbb{B}') = q\{(-\mathbb{v}) \times \mathbb{B}'\} = -\mathbb{F}$$

$$\therefore -\mathbb{v} \times \mathbb{B}' = -\mathbb{v} \times \mathbb{B}$$

$\mathbb{B}' = \mathbb{B}$ $\quad$ $\mathbb{B}$ 는 SI even.

$$\mathbb{F} \xrightarrow{TR} \tilde{\mathbb{F}} = \tilde{q}(\tilde{\mathbb{v}} \times \tilde{\mathbb{B}}) = q\{(-\mathbb{v}) \times \tilde{\mathbb{B}}\} = \mathbb{F}$$

$$\therefore (-\mathbb{v}) \times \tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{v} \times \mathbb{B}.$$

$\tilde{\mathbb{B}} = -\mathbb{B}$, $\quad$ $\mathbb{B}$ 는 TR odd.

Magnetic field $\mathbb{H}$ 는 SI even TR odd.

맥스웰 방정식 $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J}$ 이용.

$$J_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \xrightarrow{SI} J_i' = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k'}{\partial(-x_j)} = -J_i = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j}$$

$\therefore \mathbb{H}' = \mathbb{H}$, SI 에 even.

$$J_i \xrightarrow{TR} \tilde{J}_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j} = -J_i = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j}$$

$\therefore \tilde{\mathbb{H}} = -\mathbb{H}$, TR에 odd

Magnetization $\mathbb{M}$ 는 SI even TR odd.

$\mathbb{M} = \frac{1}{\mu_0}\mathbb{B} - \mathbb{H}$, $\quad$ $\mathbb{M}$과 $\mathbb{H}$는 transformation property 가 같아야 한다.

Poynting vector $\mathbb{S}$ 는 SI odd, TR odd.

true vector와 pseudo vector의 cross product는 true vector 이다.

$$S_i = \varepsilon_{ijk} E_j H_k \xrightarrow{SI} \varepsilon_{ijk} E_j' H_k' = -\varepsilon_{ijk} E_j H_k = -S_i. \quad \therefore \mathbb{S}' = -\mathbb{S}$$

SI odd.

$$S_i \xrightarrow{TR} \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_j \tilde{H}_k = -\varepsilon_{ijk} E_j H_k = -S_i \quad \tilde{\mathbb{S}} = -\mathbb{S}$$

TR odd.

Maxwell stress tensor $T_{\alpha\beta}$ 는 SI에 even $\quad$ TR에 even.

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2\right)$$

$\mathbb{E}$는 $\mathbb{E}$끼리, $\mathbb{B}$는 $\mathbb{B}$끼리 곱해져 있다. 어떤 transform을 해도 even 할 수 밖에 없다.

transformation property가 같은 물리량 2개가 곱해진 2차항으로만 이루어 졌기 때문,

다르게 생각하면, stress tensor에 $E_i B_j$ 같은 항이 없는 이유가 transformation property 이다.

6번 문제 (a)

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos(\mathbb{k}\cdot\mathbb{x} - \omega t + \delta_1), \quad \frac{E_y}{a_2} = \cos(\mathbb{k}\cdot\mathbb{x} - \omega t + \delta_2)$$

$\frac{E_x}{a_1} = X$, $\frac{E_y}{a_2} = Y$ 라고 쓰자, $\mathbb{k}\cdot\mathbb{x} - \omega t = \tau$ 라고 쓰자., $\delta_2 - \delta_1 = \Delta$ 라고 쓰자.

$$X = \cos(\tau + \delta_1) = \cos\tau\cos\delta_1 - \sin\tau\sin\delta_1$$

$$Y = \cos(\tau + \delta_2) = \cos\tau\cos\delta_2 - \sin\tau\sin\delta_2 = \cos\tau\cos(\Delta + \delta_1) - \sin\tau\sin(\Delta + \delta_1)$$

$$= \cos\tau\{\cos\Delta\cos\delta_1 - \sin\Delta\sin\delta_1\} - \sin\tau\{\sin\Delta\cos\delta_1 + \sin\delta_1\cos\Delta\}$$

$$= \cos\Delta\{\cos\tau\cos\delta_1 - \sin\tau\sin\delta_1\} - \sin\Delta\{\cos\tau\sin\delta_1 + \cos\tau\cos\delta_1\}$$

$$= \cos\Delta\cos(\tau + \delta_1) - \sin\Delta\sin(\tau + \delta_1)$$

$$= X\cos\Delta - \sin\Delta\sin(\tau + \delta_1)$$

$$\{Y - X\cos\Delta\}^2 = \{-\sin\Delta\sin(\tau + \delta_1)\}^2$$

$$X\cos^2\Delta + Y^2 - 2XY\cos\Delta = \sin^2\Delta\sin^2(\tau + \delta_1) = \sin^2\Delta(1 - X^2)$$

$$X^2(\cos^2\Delta + \sin^2\Delta) + Y^2 - 2XY\cos\Delta = \sin^2\Delta$$

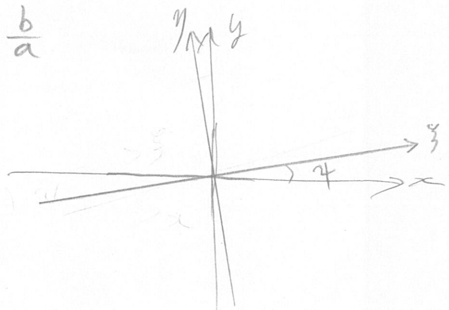
$$X^2 + Y^2 - 2XY\cos\Delta = \sin^2\Delta$$

6번 문제 (b)

$$E_\xi = a\cos(\tau + \Delta), \quad E_\eta = \pm b\sin(\tau + \Delta)$$

$a\cos(\Delta)$, $a\sin(\Delta)$, $\pm b\cos(\Delta)$, $\pm b\sin(\Delta)$, $\pm ab$, $\pm\frac{b}{a}$

를 $a_1, a_2, \delta_1, \delta_2, \psi$ 로 나타내라.



풀이 → 회전 변환을 이용하자.

$$\begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}\cdot\hat{x} & \hat{\xi}\cdot\hat{y} \\ \hat{\eta}\cdot\hat{x} & \hat{\eta}\cdot\hat{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a\cos(\tau + \Delta) = \cos\psi(a_1\cos(\tau + \delta_1)) + \sin\psi(a_2\cos(\tau + \delta_2)) \\ \pm b\sin(\tau + \Delta) = -\sin\psi(a_1\cos(\tau + \delta_1)) + \cos\psi(a_2\cos(\tau + \delta_2)) \end{cases}$$

$$a\cos(\tau)\cos(\Delta) - a\sin(\tau)\sin(\Delta) = a_1\cos\psi\{\cos\tau\cos\delta_1 - \sin\tau\sin\delta_1\} + a_2\sin\psi\{\cos\tau\cos\delta_2 - \sin\tau\sin\delta_2\}$$

$\cos(t)$의 계수 비교 → $a\cos\Delta = a_1\cos\psi\cos\delta_1 + a_2\sin\psi\cos\delta_2$

$\sin\tau$ 의 계수 비교 → $a\sin\Delta = -a_1\cos\psi\sin\delta_1 + a_2\sin\psi\sin\delta_2$

$\pm b\sin(\tau)\cos\Delta \pm b\sin\Delta\cos\tau = -a_1\sin\psi\{\cos\tau\cos\delta_1 - \sin\tau\sin\delta_1\} + a_2\cos\psi\{\cos\tau\cos\delta_2 - \sin\tau\sin\delta_2\}$

$\cos\tau$ 의 계수 비교 $\rightarrow$ $\pm b\sin\Delta = -a_1\sin\psi\cos\delta_1 + a_2\cos\psi\cos\delta_2$

$\sin\tau$ 의 계수 비교 $\rightarrow$ $\pm b\cos\Delta = a_1\sin\psi\sin\delta_1 - a_2\cos\psi\sin\delta_2$

$(a\cos\Delta)(\pm b\cos\Delta) = \pm ab\cos^2\Delta = (\cos\psi\sin\psi)(a_1^2\cos\delta_1\sin\delta_1 - a_2^2\cos\delta_2\sin\delta_2) + a_1a_2(\sin^2\psi\cos\delta_2\sin\delta_1 - \cos^2\psi\cos\delta_1\sin\delta_2)$

$(a\sin\Delta)(\pm b\sin\Delta) = \pm ab\sin^2\Delta = \cos\psi\sin\psi(-a_1^2\cos\delta_1\sin\delta_1 + a_2^2\cos\delta_2\sin\delta_2) + a_1a_2(\cos^2\psi\cos\delta_2\sin\delta_1 - \sin^2\psi\cos\delta_1\sin\delta_2)$

$\pm ab = \pm ab(\cos^2\Delta + \sin^2\Delta) = a_1a_2(\cos\delta_2\sin\delta_1 - \cos\delta_1\sin\delta_2) = a_1a_2\sin(\delta_1 - \delta_2)$

$a^2 = (a_1\cos\psi\cos\delta_1 + a_2\sin\psi\cos\delta_2)^2 + (a_1\cos\psi\sin\delta_1 + a_2\sin\psi\sin\delta_2)^2$

$= a_1^2\cos^2\psi\underline{\cos^2\delta_1} + a_2^2\sin^2\psi\underline{\cos^2\delta_2} + a_1^2\cos^2\psi\underline{\sin^2\delta_1} + a_2^2\sin^2\psi\underline{\sin^2\delta_2}$

$+ 2a_1a_2(\cos\psi\sin\psi\cos\delta_1\cos\delta_2 + \cos\psi\sin\psi\sin\delta_1\sin\delta_2)$

$a^2 = a_1^2\cos^2\psi + a_2^2\sin^2\psi + 2a_1a_2\cos\psi\sin\psi\cos(\delta_1 - \delta_2) = a_1^2\cos^2\psi + a_2^2\sin^2\psi + a_1a_2\sin(2\psi)\cos(\delta_1 - \delta_2)$

$b^2 = (a_1\sin\psi\cos\delta_1 - a_2\cos\psi\cos\delta_2)^2 + (a_1\sin\psi\sin\delta_1 - a_2\cos\psi\sin\delta_2)^2$

$= a_1^2\sin^2\psi\underline{\cos^2\delta_1} + a_1^2\sin^2\psi\underline{\sin^2\delta_1} + a_2^2\cos^2\psi\underline{\cos^2\delta_2} + a_2^2\cos^2\psi\underline{\sin^2\delta_2}$

$- 2a_1a_2(\sin\psi\cos\psi\cos\delta_1\cos\delta_2 + \sin\psi\cos\psi\sin\delta_1\sin\delta_2)$

$b^2 = a_1^2\sin^2\psi + a_2^2\cos^2\psi - 2a_1a_2\cos\psi\sin\psi\cos(\delta_1 - \delta_2) = a_1^2\sin^2\psi + a_2^2\cos^2\psi - a_1a_2\sin(2\psi)\cos(\delta_1 - \delta_2)$

$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2$ $\longrightarrow$ 앗, 어쩌다 보니 (C)를 먼저 풀어버렸다.

$a^2 - b^2 = a_1^2\cos(2\psi) - a_2^2\cos(2\psi) + 2a_1a_2\sin(2\psi)\cos(\delta_1 - \delta_2)$

$$\pm\frac{b}{a} = \pm ab/a^2 = \frac{a_1a_2\sin(\delta_1 - \delta_2)}{a_1^2\cos^2\psi + a_2^2\sin^2\psi + a_1a_2\sin(2\psi)\cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

6번 문제 (C) $\rightarrow$ 위에서 이미 보임.

6번 문제 (d) $(a_1^2 - a_2^2)\sin 2\psi = 2a_1a_2\cos\Delta\cos 2\psi$ 증명.

$a^2 - b^2 = (a_1^2 - a_2^2)\cos 2\psi + 2a_1a_2\sin(2\psi)\cos\Delta.$

이것은 ψ에 대해 미분한다, ψ는 타원의 major axis 와 minor axis 를 위해 선택되어서

$\frac{d(a^2-b^2)}{d\psi} = 0$ 이어야한다.

$$\frac{d(a^2-b^2)}{d\psi} = -2(a_1^2 - a_2^2)\sin(2\psi) + 4a_1a_2\cos(2\psi)\cos\Delta = 0.$$

$$(a_1^2 - a_2^2)\sin(2\psi) - 2a_1a_2\cos(2\psi)\cos\Delta = 0.$$

6번 문제 (e) $\frac{a_2}{a_1} = \tan\alpha$ 임을 이용해 $\tan 2\psi = \tan 2\alpha \cos\Delta$ 임을 보여라.

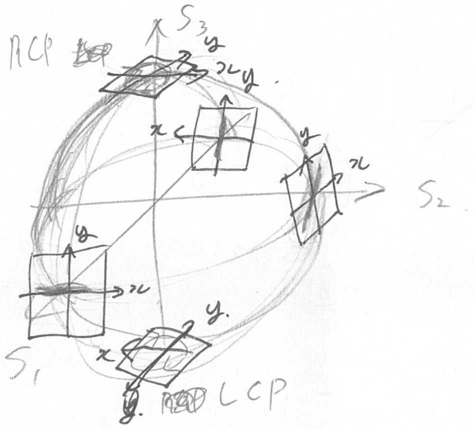
$\tan\alpha = \phi$ 라고 두고, 배각공식. $\tan 2\alpha = \frac{2\phi}{1-\phi^2}$

$$a_1^2(1-\phi^2)\sin(2\psi) = 2a_1^2\phi\cos(2\psi)\cos\Delta$$

$$\frac{\sin(2\psi)}{\cos(2\psi)} = \frac{2\phi}{1-\phi^2}\cos\Delta \quad \longrightarrow \quad \boxed{\tan 2\psi = \tan 2\alpha\cos\Delta}$$

6번 문제 (f) $\pm\frac{a_2}{a_1} = -\tan\chi \quad \left(-\frac{\pi}{4} \le \chi \le \frac{\pi}{4}\right)$ 를 이용해 $\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin\Delta$ 를 보이기.

χ는 무엇을 나타내나? 푸앵카레 구에서 $S_1 S_2$ 평면과의 각도이다.



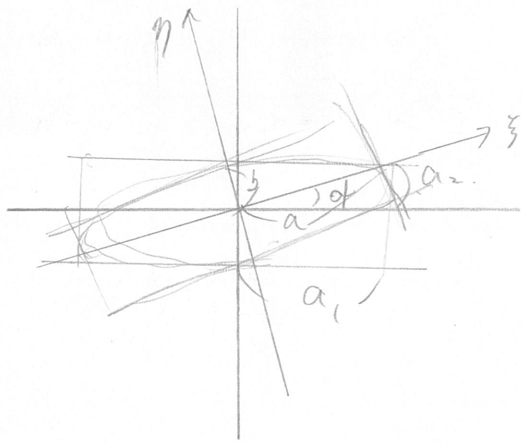
S_1은 x 선형편광이 y보다 우세한 정도.

S_2는 대각 선형편광인 정도,

S_3는 LCP가 RCP보다 우세한 정도.

따라서, χ는 편광이 얼마나 원형편광인가, 지금 보고 있는 타원이 얼마나 원에 가까운가에 대한 척도이다.

그래서 $\tan\chi$를 b와 a의 비율이라고 보는 게 더 직관적일... 지도 모른다,



$\pm\frac{b}{a} = \tan\chi$ 로 정의한다면, $\longrightarrow$ 교수님께 메일로 문의 드림.

$$\sin 2\chi = 2\sin\chi\cos\chi = \frac{2\sin\chi\cos\chi}{\sin^2\chi + \cos^2\chi} = \frac{\pm 2ab}{a^2+b^2}$$

(b)번에서 답이, $\pm ab = a_1 a_2 \sin\Delta$

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2 + b^2.$$

$$\sin 2\chi = \frac{2a_1 a_2 \sin\Delta}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha\sin\Delta}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha\,\sin\Delta.$$

6번 문제 (g) 다음은 보여라.

$$\begin{cases} S_0 = a_1^2 + a_2^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \\ S_1 = a_1^2 - a_2^2 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ S_2 = 2a_1 a_2 \cos\Delta = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ S_3 = 2a_1 a_2 \sin\Delta = S_0 \sin 2\chi . \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 오타같다. $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$

풀이 $\rightarrow$

S_0부터 증명, $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = a_1^2 + a_2^2$ 임을 보인다. 원래는 이걸 제일 마지막에 증명해야 하긴 하지만...

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= (a_1^2 - a_2^2)^2 + (2a_1 a_2 \cos\Delta)^2 + (2a_1 a_2 \sin\Delta)^2 \\ &= a_1^4 + a_2^4 - 2a_1^2 a_2^2 + 4a_1^2 a_2^2 (\cos^2\Delta + \sin^2\Delta) \\ &= a_1^4 + a_2^4 + 2a_1^2 a_2^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2) \\ &= S_0^2 \end{aligned}$$

S_3 증명, (f)번의 $\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin\Delta$ 로부터,

$$\sin 2\chi = \frac{2\cos\alpha \sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \sin\Delta = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin\Delta = \frac{2a_1 a_2}{S_0} \sin\Delta .$$

$\therefore\ 2a_1 a_2 \sin\Delta = S_0 \sin 2\chi .$

S_1 증명,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = (a_1^2 - a_2^2)\cos 2\psi + 2a_1 a_2 \sin(2\psi)\cos\Delta \\ (a_1^2 - a_2^2)\sin 2\psi = 2a_1 a_2 \cos(2\psi)\cos\Delta \end{cases} \rightarrow\ 2a_1 a_2 \cos\Delta = (a_1^2 - a_2^2)\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi}$$

$$a^2 - b^2 = (a_1^2 - a_2^2)\cos 2\psi + (a_1^2 - a_2^2)\frac{\sin^2 2\psi}{\cos 2\psi} = (a_1^2 - a_2^2)\frac{1}{\cos 2\psi}$$

$$S_1 = (a_1^2 - a_2^2) = (a^2 - b^2)\cos 2\psi = (a_1^2 + a_2^2)\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\cos 2\psi =$$

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2 + b^2$$

$$S_1 = S_0^2 \frac{\cos^2\chi - \sin^2\chi}{\cos^2\chi + \sin^2\chi}\cos 2\psi = S_0^2 \cos 2\chi \cos 2\psi .$$

S_2 증명,

(d)의 결과에서, $\sin 2\psi = \dfrac{2a_1a_2\cos\Delta}{a_1^2-a_2^2}\cos 2\psi.$

$$a_1^2 - a_2^2 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi$$

$$2a_1a_2\cos\Delta \cdot \cancel{\cos 2\psi} \overset{?}{=} S_0 \cos 2\chi\, \cancel{\cos 2\psi} \sin 2\psi.$$

$$S_2 = 2a_1a_2\cos\Delta = S_0\cos 2\chi \sin 2\psi.$$

(h) 풀이 (마지막 문제)

적도선에 있는 점들은 선형편광 상태를 나타내며, 2ψ 에 따라 편광 각도가 달라진다.

upper hemispher, $\chi > 0$ 인 경우는. $+\tan\chi = \frac{b}{a} < 0.$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin\Delta < 0$$

$$\sin\Delta < 0.$$

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta < 0 \quad) \; \Delta = \delta_2 - \delta_1.$$

$$\delta_2 < \delta_1.$$

E_x의 위상이 E_y보다 앞선다.

시간이 지나면서 clock wise 방향으로 회전한다.

따라서 북극점은 RCP 에 해당한다. $|\chi|$ 가 클수록 타원에서 원형이 되기 때문.

lower hemispher은 시간이 지남에 따라 anti-clockwise로 돌아간다,

따라서 남극점은 LCP에 해당한다.