

Sakurai p 2.41. propagators and action.

시작점: $(x, t) = (0, 0)$ 도착점: $(x, t) = (D, T)$

첫번째 path는 시간에 따라 $x_1(t) = \frac{1}{2}at^2$

두번째 path는 시간에 선형 $x_2(t) = vt$.

a 와 v 는 constant. 올바른 classical path는 첫번째이다.

문제 → (a) a 의 값을 찾고, $F = -\frac{dV}{dx}$ 일 때 $V(x)$ 를 m, D, T 의 형태로 나타내라.
 v 도 찾아라.

풀이 $D = x_1(T) = \frac{1}{2}aT^2$, $a = \frac{2D}{T^2}$, $-\frac{dV}{dx} = ma = \frac{2mD}{T^2}$, $V = -\frac{2mD}{T^2}x$
 $v = \frac{D}{T}$.

문제 → (b) classical action $S(x(t)) = \int_0^T [\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)] dt$ 은 두 가지 경로에 대해 계산하라. $S_1 < S_2$ 임을 확인하고 $\Delta S = S_2 - S_1$ 을 계산하라.

풀이 첫번째 경로, $\dot{x}_1(t) = at$, $S_1 = \int_0^T [\frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{mad}{T^2}t^2] dt$

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}ma^2 + \frac{mad}{T^2} \right) \cdot \frac{1}{3}T^3 = \left(\frac{1}{2}m \cdot \frac{4D^2}{T^4} + \frac{mD}{T^2} \cdot \frac{2D}{T^2} \right) \cdot \frac{1}{3}T^3$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{mD^2}{T}$$

두번째 경로,

$$S_2 = \int_0^T \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{2mD}{T^2} \cdot vt \right) dt$$

$$= \frac{1}{2}mv^2T + \frac{2mD}{T^2} \cdot v \cdot \frac{1}{2}T^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \frac{mD^2}{T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{mD^2}{T}$$

$S_1 < S_2$ 임을 확인, $\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{mD^2}{T}$

문제 → (c) $D = 1\text{mm}$, $T = 1\text{ms}$ 일 때 두 경로의 $\Delta S/h$ 를 계산하라.

하나는 100개의 C 로 만든 거린 입자이고 다른 하나는 전자이다.

어떤 경우에 경로가 "양자적" 이라고 할 수 있겠나? $m = 9 \times 10^{-31}$

$$\frac{D^2}{T} = 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}, \quad m_C = 12.8/\text{mol} \times \frac{100}{1\text{mol}} = 1200\text{g}/6.02 \times 10^{23} = 2 \times 10^{-21} \text{g} = 2 \times 10^{-24} \text{kg}$$

$$\frac{\Delta S}{h} = \frac{1}{6h} \frac{D^2}{T} m, \quad D^2/T = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}, \quad h = 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg} / \text{s}$$

$$\frac{1}{6h} \cdot \frac{D^2}{T} = \frac{1}{6} \cdot 10^{31} \text{ kg}^{-1} = 1.6 \times 10^{30} \text{ kg}^{-1}$$

전자의 질량은 $m_e = 9 \times 10^{-31}$, 100 C 탄소 입자의 질량은

$$M_c = 12 \text{ g/mol} \cdot \frac{100}{1 \text{ mol}} = \frac{1200 \text{ g}}{6 \times 10^{23}} = 2 \times 10^{-21} \text{ g} = 2 \times 10^{-24} \text{ kg}$$

전자의 경우, $\frac{\Delta S}{h} = (1.6 \times 10^{30} \text{ kg}^{-1}) \times (9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) = 1.44$

탄소 탄소 입자의 경우, $\frac{\Delta S}{h} = (1.6 \times 10^{30} \text{ kg}^{-1}) \times (2 \cdot 10^{-24} \text{ kg})$
 $= 3.2 \times 10^6$

질량이 적은 전자의 경우, 비고전적인 경로로의 phase가 고전적 경로와 크게 차이 나지 않는다. 이는 양자적인 효과를 나타내며, 비고전적 경로의 phase도 크게 상쇄되지 않고, 눈동에 기여할 수 있음을 나타낸다.

반면 탄소 탄소 입자는, 10^6 단위로 phase가 다르며, 이는 고전적 경로와 조금이라도 다른 경로는 커다란 phase 변화 (변위에 따라 phase가 빠르게 진동) 함을 만들 수 있다, 그래서 질량이 큰 물체는 거의 ~~고전적~~ 고전적인 경로만을 따라서 운동한다.